DEA D'ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire
Examen écrit du 23 Janvier 2003 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I (4 points)

Soit l'équation d'advection linéaire en dimension 2 d'espace

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

avec une vitesse constante, de composantes positives $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$. On considère un maillage spatial uniforme de pas d'espace $\Delta x > 0$ dans la direction x et $\Delta y > 0$ dans la direction y. Soit $\Delta t > 0$ le pas de temps. On note $u_{i,j}^n$ une approximation de la solution u au point $(t, x, y) = (n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y)$. On pose

$$c_1 = a_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad c_2 = a_2 \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

On considère le schéma

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+1} = \; & H(\{u_{i,j}^n\}) \\
= \; & \left(1 - \tfrac{1}{2}c_1^2(2-c_2) - \tfrac{1}{2}c_2^2(2-c_1)\right) u_{i,j}^n \\
& -\tfrac{1}{4}c_1(1-c_1)(2-c_2)u_{i+1,j}^n - \tfrac{1}{4}c_2(1-c_2)(2-c_1)u_{i,j+1}^n \\
& +\tfrac{1}{4}\left(c_1(1+c_1)(2-c_2) - 2c_1c_2^2\right) u_{i-1,j}^n + \tfrac{1}{4}\left(c_2(1+c_2)(2-c_1) - 2c_1^2c_2\right) u_{i,j-1}^n \\
& -\tfrac{1}{4}c_1c_2(1-c_1)u_{i+1,j-1}^n - \tfrac{1}{4}c_1c_2(1-c_2)u_{i-1,j+1}^n \\
& +\tfrac{1}{4}c_1c_2\left(2+c_1+c_2\right) u_{i-1,j-1}^n
\end{aligned}$$

1. Montrer que si $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$, alors on retrouve le schéma de Lax-Wendroff. Montrer que si $c_1 = c_2 = 1$, alors on transporte exactement la donnée initiale.

2. Soit $u(x, y)$ une fonction régulière. Montrer que

$$\begin{aligned}
H\Big(\{u(i\Delta x, j\Delta y)\}\Big) = \; & \Big(u - c_1\Delta x \tfrac{\partial u}{\partial x} - c_2\Delta y \tfrac{\partial u}{\partial y} + c_1c_2\Delta x\Delta y \tfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + \tfrac{1}{2}(c_1\Delta x)^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}(c_2\Delta y)^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)(i\Delta x, j\Delta y) \\
& + \mathcal{O}\Big((\Delta x)^3 + (\Delta y)^3 + \Delta x(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2\Delta y\Big).
\end{aligned}$$

   En déduire que le schéma est consistant et d'ordre 2 (en espace et en temps).

Exercice II (7 points)
On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides (ou phases) compressibles. On note ρ la densité du mélange, u la vitesse du mélange, C la concentration massique du premier fluide (on a toujours $0 \leq C \leq 1$), et $p \equiv p(\rho, C)$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier les conditions

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2 > 0 \quad 2\frac{\partial p}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} > 0, \tag{1}$$

où $a > 0$ désigne la vitesse du son du mélange. En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements diphasiques par le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u C)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que le système (2) est strictement hyperbolique et calculer les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres r_1, r_2, r_3 de sa Jacobienne (on conseille de travailler avec les variables (ρ, u, C)).

2. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré. Donner les invariants de Riemann du champ 2.

3. Montrer que la fonction

$$E(\rho, u, C) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} r^{-2} p(r, C)\, dr$$

est une entropie du système (2). On donnera l'expression du flux d'entropie mais on ne vérifiera pas que E est convexe.

4. L'origine physique de (2) est en fait le système **moyenné** de la dynamique des gaz isentropique pour chacun des fluides $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i^2 + \alpha_i p_i)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où $\alpha_i \geq 0$ désigne la fraction volumique du fluide i et $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Montrer que les hypothèses d'un mélange homogène $u_1 = u_2 = u$ et $p_1 = p_2 = p$ permettent d'obtenir (2) à partir de (3) avec la définition

$$\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \quad \text{et} \quad \rho C = \alpha_1 \rho_1.$$

5. On suppose que les lois d'état $p_i \equiv p_i(\rho_i)$ vérifient

$$\frac{dp_i}{d\rho_i} = a_i^2 > 0$$

où $a_i > 0$ désigne la vitesse du son de la phase i. Démontrer la formule

$$a = \left(\frac{\alpha_1 \rho}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\alpha_2 \rho}{\rho_2 a_2^2} \right)^{-1/2}, \tag{4}$$

ce qui prouve d'ailleurs que $\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2 > 0$.

Application physique amusante: on suppose α_1 et α_2 fixés strictement positifs et $\rho_1 << \rho_2$, $a_1 << a_2$ (c'est le cas, par exemple, si 1 est de l'air et 2 de l'eau). Donner une formule simplifiée pour (4) et en déduire que la vitesse du son dans le mélange est bien plus faible que la vitesse du son dans chacun des fluides (ce phénomène est exploité par les sous-marins qui lachent des rideaux de bulles pour échapper aux sonars accoustiques).

Exercice III (9 points)

Soit f une fonction C^2, de $I\!R$ dans $I\!R$, strictement convexe avec $f'' > 0$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$. Soit $u_0(x)$ une fonction régulière à support compact dans $I\!R$. On considère l'équation hyperbolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad x \in I\!R,\ t \in I\!R^+, \\ u(t=0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

dont on sait qu'elle admet une unique solution entropique. On étudie le comportement asymptotique en temps grand de cette solution. On admettra que la solution est régulière par morceaux avec un nombre fini (et uniformément borné en temps) de chocs. On rappelle que, de part et d'autre d'un choc, on peut calculer la valeur de la solution par la méthode des caractéristiques. Si u admet un choc en un point x on notera $u(t, x-0)$ la valeur à gauche et $u(t, x+0)$ la valeur à droite.

1. Montrer que, pour tout temps $t \geq 0$, la solution $u(t,x)$ a un support compact en $x \in I\!R$. On définit la borne supérieure de son support

   $$s^+(t) = \inf\{y \in I\!R \text{ tel que } u(t,x) = 0\ \forall x > y\} \quad \text{et} \quad u^+(t) = u(t, s^+(t) - 0).$$

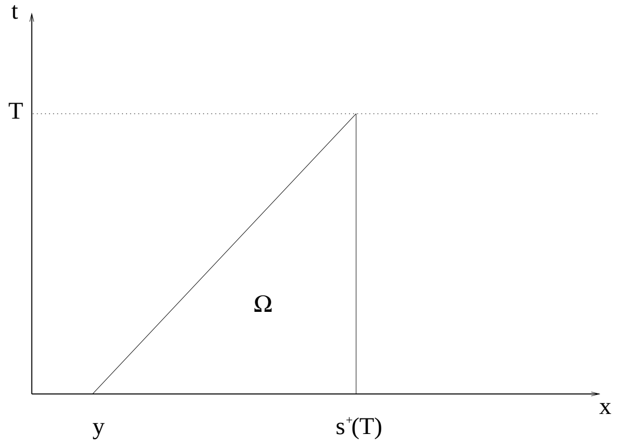
   A l'aide de la condition d'entropie, montrer que $u^+(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

2. Montrer que si $x \to u(t,x)$ est continue en $s^+(t)$ alors $ds^+(t)/dt = 0$ (on pourra utiliser la méthode des caractéristiques). Montrer que si $u(t,x)$ admet un choc en $s^+(t)$ alors $ds^+(t)/dt > 0$ (on pourra effectuer un développement de Taylor sur f dans la relation de Rankine-Hugoniot). En déduire que $t \to s^+(t)$ est une fonction croissante.

3. Montrer que pour $T > 0$ on a

$$u^+(T) \leq \sqrt{\frac{2q}{\mu T}},$$

avec $\mu = \inf_{|u| \leq \|u_0\|_{L^\infty(I\!R)}} f''(u)$ et $q = \max_{y \in I\!R} \int_y^{+\infty} u_0(x)\, dx$. Indication: on intègrera l'équation hyperbolique sur le domaine Ω défini à la Figure 3 où y est le pied de la caractéristique passant par le point $(T, s^+(T))$.



4. En utilisant la relation de Rankine-Hugoniot, en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$s^+(t) \leq s^+(0) + C\sqrt{t}.$$

5. On admet que l'on a un résultat symétrique pour la borne inférieure du support de u

$$s^-(t) = \sup\{y \in I\!R \text{ tel que } u(t,x) = 0\ \forall x < y\},$$

c'est-à-dire que $s^-(t) \geq s^-(0) - C\sqrt{t}$. En utilisant l'équation d'une courbe caractéristique et le fait que $|f'(u)| \geq \mu|u|$ pour $|u| \leq \|u_0\|_{L^\infty(I\!R)}$, conclure que

$$|u(t,x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad \text{pour} \quad t \to +\infty.$$