MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire
Examen écrit du 20 Janvier 2005 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice (3 points)
Soit l'équation hyperblique non-linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^4}{\partial x} = 0$$

avec la donnée initiale

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculer explicitement l'unique solution entropique de ce problème de Riemann. (On pourra admettre les résultats énoncés dans le cours à ce sujet.)

Problème (17 points)
On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec une loi d'état $p \equiv p(\rho)$. On note ρ la densité (supposée toujours strictement positive) et u la vitesse du fluide. Dans cette première partie, on suppose que la loi d'état est celle d'un gaz parfait, $p = \rho^\gamma$, $\gamma > 1$, et on demande de redémontrer des résultats vus en cours.

1.1 Calculer la matrice jacobienne de (1) dans les variables (ρ, u) et diagonaliser la. Le système est-il hyperbolique ?

1.2 Montrer que les deux champs caractéristiques sont VNL (vraiment non linéaires).

Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs de (1) rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de remplacer (1) par un système approché, dit **système de relaxation**, qui s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 + \pi)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u V)}{\partial x} = \mu \rho \left(\dfrac{1}{\rho} - V \right) \end{cases} \tag{2}$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, une nouvelle variable $V(t, x)$, dite volume de relaxation, et une nouvelle loi d'état

$$\pi(\rho, V) = p(1/V) + a^2 \left(V - \frac{1}{\rho} \right) \tag{3}$$

où $a > 0$ est une constante et $p(1/V)$ est la "vraie" loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse).

2.1 Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ vaut $+\infty$, alors on retrouve (1) à partir du système (2).

2.2 Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (2), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source. Autrement dit, on pose $\mu = 0$. On suppose aussi que ρ et V sont toujours strictement positifs. Monter que (2) est hyperbolique et calculer les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres r_1, r_2, r_3 de sa jacobienne (on conseille de travailler avec les variables (ρ, u, V)).

2.3 Montrer que la fonction

$$E(\rho, u, V) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} r^{-2} \pi(r, V)\, dr$$

est une entropie du système (2). Pour cela on vérifiera que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (uG)}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad G = \frac{1}{2}\rho u^2 + H(\rho, V).$$

On donnera l'expression de la fonction $H(\rho, V)$ dans le flux d'entropie mais on ne vérifiera pas que E est convexe.

2.4 Montrer que les 3 champs sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact.) Les ondes associées sont-elles entropiques ?

2.5 Donner 2 invariants de Riemann indépendants pour chaque champ.

2.6 En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot, montrer que u et π sont constants dans une 2-onde, tandis que les courbes de 1-onde ou de 3-onde sont des droites dans le plan (u, π).

2.7 A l'aide du dessin des courbes d'onde dans le plan (u, π) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche (ρ_L, u_L, V_L) et un état droit (ρ_R, u_R, V_R) on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant 2 états intermédiaires (ρ_1, u_1, V_1) et (ρ_2, u_2, V_2). On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.