MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire et F. Coquel
Examen écrit du 26 Janvier 2006 (3 heures)

1 Exercice

On considère le problème de Riemann suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^3 = 0, \quad x \in I\!R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

avec $u_L > 0$ et $u_R \in]-u_L, -u_L/2[$. En posant $f(u) = u^3$, on définit :

$$\sigma(u, u_L) \equiv \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}. \tag{2}$$

1) Expliciter les deux solutions de l'équation (en u), $\sigma(u, u_L) = f'(u)$. En notant $u_\sharp(u_L)$ la racine négative, donner l'interprétation géométrique de la droite d'équation $f(u_L) + f'(u_\sharp(u_L))(u - u_L)$ (tracer un dessin).
2) En déduire l'unique solution entropique (au sens de Kruzkov) du problème (1).
3) Après avoir précisé la signification de la fonction :

$$u \to \mathcal{E}(u, u_L) = -\sigma(u, u_L)\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u_L^2}{2}\right) + \left(\frac{3u^4}{4} - \frac{3u_L^4}{4}\right), \tag{3}$$

vérifier que $\mathcal{E}(u, u_L) \leq 0$ si et seulement si $u \in [-u_L, u_L]$ et que son minimum est atteint en $u_\sharp(u_L)$.
4) En reprenant la notation (2) on introduit la fonction :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < \sigma(u_\star, u_L)t, \\ u_\star, & \sigma(u_\star, u_L)t < x < \sigma(u_R, u_\star)t, \\ u_R, & x > \sigma(u_R, u_\star)t, \end{cases} \tag{4}$$

avec $u_\star \in]-u_L, u_R[$. Etablir que la fonction (4) est solution faible du problème de Riemann (1) (on n'oubliera pas de vérifier que la fonction est monovaluée). Dire pourquoi la discontinuité se propageant à la vitesse $\sigma(u_R, u_\star)$ vérifie toutes les conditions d'entropie de Kruzkov. En déduire que la solution faible (4) de (1) satisfait au sens des distributions l'inégalité d'entropie :

$$\partial_t \frac{u^2}{2} + \partial_x \frac{3u^4}{4} \leq 0. \tag{5}$$

En rappelant qu'une solution de Kruzkov vérifie nécessairement :

$$\min_{y \in I\!R} u_0(y) \leq u(x,t) \leq \max_{y \in I\!R} u_0(y), \quad TV(u(.,t)) \leq TV(u_0), \tag{6}$$

déduire ce qui oppose essentiellement la famille de solutions faibles de (1)-(5) paramétrée par $u_\star$ de la solution de Kruzkov de (1).
Remarque. Cette exemple montre que contrairement au cas d'une fonction flux convexe (ou concave), la satisfaction d'une seule inégalité d'entropie ne suffit pas à restaurer l'unicité.

2 Problème

Soit le système des équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad x \in I\!R,\ t > 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t E + \partial_x((E+p)u) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

avec $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, E) \in \Omega_\mathbf{U}$ et

$$\Omega_\mathbf{U} = \{(\rho, \rho u, E) \in I\!R^3 \text{ tel que } \rho > 0,\ e = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}u^2 > 0\},$$

fermé par la donnée d'une loi de pression $\mathbf{U} \in \Omega_\mathbf{U} \to p(\mathbf{U}) \equiv p(\rho, e) \in I\!R^+$ obéissant au second principe de la thermodynamique, c'est-à-dire qu'il existe une application $S(\mathbf{U}) : \Omega_\mathbf{U} \to I\!R$ supposée de classe $\mathcal{C}^1$, dite entropie spécifique, telle que :

(i) les solutions régulières de (7) vérifient la loi de conservation supplémentaire :

$$\partial_t\Big(\rho S(\mathbf{U})\Big) + \partial_x\Big(\rho S(\mathbf{U})u\Big) = 0, \tag{8}$$

(ii) l'application $\mathbf{U} \in \Omega_\mathbf{U} \to \{\rho S\}(\mathbf{U}) \in I\!R$ est strictement convexe :

$$\{\rho S\}(\alpha \mathbf{U}_1 + (1-\alpha)\mathbf{U}_2) < \alpha\{\rho S\}(\mathbf{U}_1) + (1-\alpha)\{\rho S\}(\mathbf{U}_2), \tag{9}$$

pour tout $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$ dans $\Omega_\mathbf{U}$ et α dans $]0,1[$.

En conséquence, le système (7) est strictement hyperbolique sur $\Omega_\mathbf{U}$.

2.1 Préambule

1) Vérifier que $\mathbf{U} : I\!R \times I\!R^+ \to \Omega_{\mathbf{U}}$ solution régulière de (7) satisfait l'équation de transport :

$$\partial_t S(\mathbf{U}) + u\partial_x S(\mathbf{U}) = 0. \tag{10}$$

2) Soit $\mathcal{F} : I\!R \to I\!R$ une fonction arbitrairement choisie dans $\mathcal{C}^1(I\!R, I\!R)$. Déduire de (10) que $\mathbf{U} : I\!R \times I\!R^+ \to \Omega_{\mathbf{U}}$ solution régulière de (7) vérifie la loi de conservation supplémentaire :

$$\partial_t \Big(\rho \mathcal{F}(S(\mathbf{U}))\Big) + \partial_x \Big(\rho \mathcal{F}(S(\mathbf{U}))u\Big) = 0. \tag{11}$$

2.2 Le cas des solutions régulières

Dans ce paragraphe, on suppose qu'il existe une solution $\mathbf{U}(x,t)$ de (7) qui appartient à $(\mathcal{C}^1 \cap L^\infty)(I\!R \times [0,T], \Omega_{\mathbf{U}})$ pour un temps fixé $T > 0$, et telle que le champ de vitesse $u(.,t)$ reste à support compact dans le même compact K pour tout $t \in [0,T]$.
Pour simplifier on note désormais $S(x,t)$ l'entropie spécifique $S(\mathbf{U}(x,t))$.
3) Montrer que la solution considérée vérifie pour $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^1(I\!R, I\!R)$:

$$\int_K (\rho \mathcal{F}(S))(x,t)dx = \int_K (\rho \mathcal{F}(S))(x,0)dx, \quad \text{pour tout } t \in [0,T]. \tag{12}$$

4) Au temps initial on définit :

$$M = \max_{y \in K} (S(y,0)). \tag{13}$$

Déduire de (12) l'estimation :

$$S(x,t) \le M, \quad \text{pour tout } x \in K, \ t \in [0,T]. \tag{14}$$

A cette fin, on introduira la fonction $\mathcal{G}^+ : x \in I\!R \to \mathcal{G}^+(x) = \max(x-M, 0) \equiv (x-M)_+$ et la famille de fonctions régularisées $\{\mathcal{F}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ classiquement définie pour $\epsilon > 0$ par $\mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{G}^+ * \theta_\epsilon$ où θ désigne un noyau de régularisation.
5) Indiquer comment établir l'estimation :

$$\min_{y \in K} (S(y,0)) \le S(x,t), \quad \text{pour tout } x \in K, \ t \in [0,T]. \tag{15}$$

2.3 Le cas des solutions faibles entropiques

Dans ce paragraphe, on considère une solution faible entropique $\mathbf{U}(x,t)$ de (7) qui appartient à $(L^1 \cap L^\infty)(I\!R \times I\!R^+, \Omega_{\mathbf{U}})$, et telle que le champ de vitesse $u(.,t)$ reste à support compact dans le même compact K pour tout $t \geq 0$. Rappelons qu'une solution faible entropique de (7) vérifie l'inégalité d'entropie supplémentaire :

$$\partial_t(\rho S(\mathbf{U})) + \partial_x(\rho S(\mathbf{U})u) \leq 0, \tag{16}$$

au sens des distributions.
6) Expliquer en intégrant l'inéquation (16) **formellement**, c'est-à-dire au sens classique, pourquoi on est en droit d'attendre la validité d'une estimation étendant (14) alors qu'en revanche l'estimation (15) valable pour des solutions régulières devient en général fausse pour les solutions faibles entropiques.
On se propose de démontrer le principe du maximum (14) pour la solution faible entropique (unique) du problème de Riemann avec une donnée initiale de la forme :

$$\mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L + (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)H(x), \quad (H \text{ fonction de Heavyside}) \tag{17}$$

où $\mathbf{U}_L$ et $\mathbf{U}_R$ sont choisis dans $\Omega_{\mathbf{U}}$ de sorte à ce que le vide n'apparaisse pas. Afin de fixer les notations, cette solution est généralement constituée de quatre états constants notés, de gauche à droite, $\mathbf{U}_L$, $\mathbf{U}_L^\star$, $\mathbf{U}_R^\star$, $\mathbf{U}_R$ séparés par trois ondes. Par construction les états $\mathbf{U}_L^\star$ et $\mathbf{U}_R^\star$ sont séparés par la 2-onde de discontinuité de contact.
7) Considérons une autre solution discontinue de (7) de la forme :

$$\mathbf{V}(x,t) = \mathbf{U}_- + (\mathbf{U}_+ - \mathbf{U}_-)H(x - \sigma t). \tag{18}$$

En imposant à cette solution de vérifier l'inégalité d'entropie (16), montrer que :

$$\rho_-(u_- - \sigma)(S(\mathbf{U}_+) - S(\mathbf{U}_-)) \leq 0, \tag{19}$$

où ρ_- et u_- sont la densité et la vitesse de l'état gauche $\mathbf{U}_-$. En déduire que si la discontinuité est une 1-onde de choc entropique alors $S(\mathbf{U}_+) \leq S(\mathbf{U}_-)$, si elle est une 3-onde de choc entropique alors $S(\mathbf{U}_-) \leq S(\mathbf{U}_+)$ et que (19) est une égalité dans le cas d'une 2-onde de discontinuité de contact.
8) Démontrer l'estimation suivante généralisant (14) :

$$S(\mathbf{U}(x,t)) \leq \max(S(\mathbf{U}_L), S(\mathbf{U}_R)), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \tag{20}$$

où $\mathbf{U}(x,t)$ désigne la solution du problème de Riemann associée à la donnée initiale (17).

2.4 Application aux méthodes de volumes finis

9) Sur un maillage régulier $x_j = j\Delta x$, $t^n = n\Delta t$, on considère la méthode de Godunov (avec résolution exacte du problème de Riemann aux interfaces $x_{j+1/2}$ des cellules) sous la condition $CFL \leq 1/2$. Rappelons le principe de la méthode de Godunov : au temps t^n, pour la donnée initiale des états constants $\mathbf{U}_j^n$ dans les mailles $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, on calcule $\mathbf{U}_{\Delta x}$ la collection des solutions des problèmes de Riemann aux interfaces. On moyenne pour obtenir alors les nouvelles valeurs par maille $\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^n + \Delta t)dx$, et donc en particulier $\rho_j^{n+1} = \rho(\mathbf{U}_j^{n+1})$. Déduire de (20) :

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \{\rho S\}(\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^n+\Delta t))dx \leq \rho_j^{n+1} \max(S(\mathbf{U}_{j-1}^n),\ S(\mathbf{U}_j^n),\ S(\mathbf{U}_{j+1}^n)), \tag{21}$$

pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 0$.
10) Déduire alors de l'inégalité de Jensen :

$$\rho_j^{n+1} S(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \rho_j^{n+1} \max(S(\mathbf{U}_{j-1}^n),\ S(\mathbf{U}_j^n),\ S(\mathbf{U}_{j+1}^n)). \tag{22}$$

Pour toute fonction convexe $\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}} \to \mathcal{G}(\mathbf{U}) \in \mathbb{R}$, on rappelle l'inégalité suivante, dite de Jensen :

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b \mathbf{U}(x)dx\right) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b \mathcal{G}(\mathbf{U}(x))dx, \tag{23}$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$ et $\mathbf{U} \in L^\infty([a,b])$.
11) En conclure à l'analogue discret de (14) :

$$S(\mathbf{U}_j^n) \leq \max_{y\in\mathbb{R}} S(\mathbf{U}_0(y)), \quad j \in \mathbb{Z},\ n \geq 0. \tag{24}$$