Problèmes variationnels aux frontières ou discontinuités libres.

(Applications au traitement d'images, à l'optimisation de formes, à la mécanique de la rupture.)

Antonin Chambolle*

Mémoire d'habilitation
(soutenance le 22 novembre 2002)

Résumé

Ce document contient un exposé détaillé de mes principaux travaux de recherches depuis ma thèse de doctorat jusqu'à ce jour. Une partie importante de ces travaux concerne la fonctionnelle de Mumford et Shah (analyse, étude numérique, lien discret–continu), et l'étude de problèmes connexes, aux frontières ou discontinuités libres. Les domaines d'applications de ces problèmes sont très variés, du traitement d'images (segmentation, minimisation de la variation totale), à l'optimisation et au calcul de formes (recherche et calcul de domaines inconnus, ou de structures élastiques, optimisant un critère donné), et à la mécanique des fractures (modèles variationnels d'apparition et de propagation des fractures dans les milieux élastiques).

*CEREMADE - UMR 7534 du CNRS - Université de Paris Dauphine

Merci à

Je tiens d'abord à remercier Maria Esteban, qui a bien voulu être coordinatrice de ce travail, et dont la confiance, et l'intérêt constant pour mes travaux de recherche m'ont été d'une grande aide pour mener à bien la rédaction de ce mémoire.

Je remercie aussi Grégoire Allaire, Luigi Ambrosio et Robert V. Kohn, qui ont bien voulu lire le mémoire en détail et écrire chacun un rapport. Je suis très reconnaissant à Robert V. Kohn de l'intérêt qu'il a très tôt montré pour mes travaux, et du temps qu'il m'a accordé, tant par e-mail qu'à New-York ou à Paris. Je pourrais en dire autant de Grégoire Allaire qui m'a fait lui aussi un grand plaisir en acceptant cette tâche. Quant à Luigi Ambrosio, j'ai énormément appris en discutant avec lui, en assistant à ses séminaires, et en encadrant les travaux dirigés d'un cours qu'il a donné il y a quelques années à l'IHP, et je suis très heureux qu'il ait accepté d'être rapporteur.

Guy Bouchitté, Gianni Dal Maso, Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel, Olivier Pironneau m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury, et je leur en suis gré.

Mes premiers travaux ont été encadrés par Jean-Michel Morel, mon directeur de thèse, à la suite d'un stage de recherche avec Stéphane Mallat et Davi Geiger à New York. Grâce à eux, j'ai pris goût aux mathématiques appliquées au traitement d'images, et surtout, j'ai appris que dans cette expression tous les mots comptaient. Je tiens à les remercier.

Dans les années qui ont suivi, j'ai aussi eu la chance de pouvoir discuter et travailler avec Pierre-Louis Lions. Je reste impressionné par la facilité avec laquelle il sait transmettre des notions pas toujours évidentes. Il me fait un grand honneur en acceptant de participer au jury.

C'est grâce à Gianni Dal Maso, et à son invitation à passer une année universitaire à la SISSA, que j'ai commencé à fréquenter l'école italienne de Calcul des Variations. Je lui suis reconnaissant de l'intérêt qu'il a montré, et continue de montrer, pour mes travaux, et j'ai gardé le souvenir d'échanges passionnants et motivants, avec lui et son étudiant de l'époque Francesco Doveri, que je tiens aussi à remercier. Je dois à ce séjour mes premiers contacts et mes premières discussions scientifiques stimulantes avec de nombreux étudiants et chercheurs italiens, que je revois depuis régulièrement, et que je remercie de tout ce qu'ils m'ont appris.

Je tiens évidemment à remercier tous les collaborateurs qui m'ont encouragé ces dernières années à m'intéresser à des problèmes de plus en plus divers, Blaise Bourdin, Eric Bonnetier (qui m'ont fait découvrir le monde de l'optimisation topologique), Christopher Larsen, Brad Lucier et Fadil Santosa, que je remercie également de m'avoir invité plusieurs fois à l'IMA à Minneapolis. Je dois mentionner ici aussi Guy Bouchitté, François Jouve, Vicent Caselles, malgré ma lenteur qui fait que nos projets n'ont pas encore abouti. Et Céline Grandmont, Maria Esteban et Benoît Desjardins qui m'ont invité cette année à découvrir de nouveaux thèmes.

C'est par ailleurs toujours passionnant d'échanger des idées avec Gilles Francfort, dont je regrette qu'il n'ait pu participer au jury, Jean-Jacques Marigo, Dorin Bucur, et je suis sûr que tôt ou tard nous trouverons le temps et l'occasion de réaliser quelques-uns des nombreux projets que nous évoquons régulièrement.

J'aimerais aussi remercier Agnès Tourin et Guy Barles (pour qui j'ai toujours une question), pour la gestion presqu'impossible du TMR "Solutions de viscosité et applications", dont j'ai profité alors que je commence à peine à écrire un article sur le sujet, de même, Antoine Henrot pour le GDR d'optimisation de formes.

Enfin, un grand merci aux nombreux chercheurs avec qui c'est toujours un plaisir de discuter au CEREMADE autour d'un tableau ou d'un café, Jérôme Busca, Françoise Dibos, Isabelle Catto, Laurent Cohen (grâce à qui je suis retourné récemment dans une conférence de traitement d'images), Jean Dolbeault, Ivar Ekeland, Céline Grandmont, Arnaud Guillin, Elyès Jouini, Clotilde Napp, Eric Paturel, Marjolaine Puel, Jérôme Renault, Eric Séré, Rabah Tahraoui, merci à Gilles Barès et Michel Vanbreugel, et bien sûr aux secrétaires Josette Lévy, Magali Marc-Dibildos, Irène Mazzella et Nora Ramdani.

Table des matières

1 Introduction

L'objet de ce mémoire est la présentation de travaux ayant presque tous pour point commun de traiter de problèmes variationnels (de minimisation) en présence de frontières ou de discontinuités libres. Les premiers de ces problèmes sont issus du traitement d'images. Pour restaurer correctement les images, on a besoin en général d'un modèle d'image "idéale" ayant une certaine régularité. Mais l'expérience nous montre que cette régularité ne peut être trop grande : les objets représentés sur les images ont des bords, à travers lesquels les propriétés de l'image ne varient pas continûment. Lorsqu'on essaie de restaurer une image par une méthode variationnelle, on va donc en général essayer de modéliser l'image par une fonction régulière mais "pas trop", en pénalisant par exemple sa norme BV, ou une norme dans un espace de Besov approprié, ou encore une variante (non–convexe) de la norme BV, la fameuse fonctionnelle de Mumford et Shah. Cette dernière pénalise à la fois le gradient de la partie régulière de la fonction (de façon classique, avec un terme de Dirichlet) et la longueur (ou surface) totale de sa discontinuité. J'ai étudié à plusieurs niveaux différentes discrétisations de ces problèmes, des algorithmes numériques de résolution, ainsi que le lien entre des théories discrètes et continues de la reconstruction d'images [15, 20, 16, 17, 4, 6, 7, 10, 2]. (Voir aussi : les proceedings [23, 24, 28, 27], les notes de cours [29].) Certains de ces travaux sont le fruit de collaborations, avec P. L. Lions, B. J. Lucier, G. Dal Maso et B. Bourdin. Ils sont pour la plupart décrits dans les sections 2 et 3 de ce document.

Parallèlement à ces études, d'autres questions moins liées au traitement d'images m'ont intéressé. Pour commencer, durant mon séjour post–doctoral à la SISSA à Trieste, j'ai étudié en collaboration avec F. Doveri les "mouvements minimisants" de la fonctionnelle de Mumford et Shah [13] (*cf.* Section 5.2). Ce travail m'a orienté dans deux nouvelles directions : l'étude des problèmes d'optimisation de formes, qui utilisent des techniques semblables, et celle du modèle de croissance des fractures de Francfort et Marigo, dont [13] pouvait être vu comme une variante (très) simplifiée. La section 4 traite de l'optimisation de forme. Y sont décrits notamment des résultats théoriques d'existence ou de régularité de domaines optimaux (avec F. Doveri ou C. Larsen), et des méthodes de calcul numérique de formes optimales (avec E. Bonnetier, B. Bourdin) [12, 9, 14, 1, 3].

La section 5 traite de ma (petite) contribution à l'étude du modèle de croissance de fracture de Francfort et Marigo : j'y décris le travail [13] mentionné plus haut sur les "mouvements minimisants" de la fonctionnelle de Mumford et Shah, ainsi qu'un résultat plus récent d'existence [9].

Enfin, dans la dernière partie de ce mémoire, Section 6, j'expose une contribution [8] à l'étude de la caractérisation des minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford et Shah, par la "méthode des calibrations" d'Alberti, Bouchitté et Dal Maso. Je décris par ailleurs une extension de ce résultat, obtenue en collaboration avec G. Bouchitté.

Ce mémoire se clôt sur deux appendices où sont exposés, dans l'un, les propriétés de base des fonctions "spéciales" à variation bornée (SBV), introduites par Ambrosio et De Giorgi pour l'étude de la fonctionnelle de Mumford et Shah, et dans l'autre, la définition et les principales propriétés de la Γ–convergence, qui est une notion de convergence adaptée à l'étude et à l'approximation des problèmes variationnels.

2 La reconstruction des signaux et des images

Les premiers travaux que nous présentons ici portent sur le traitement d'images, et plus précisément sur la reconstruction et le débruitage des images. Les méthodes étudiées sont toutes de type variationnel : minimisation de la variation totale, normes d'espaces de Besov (ou équivalentes), fonctionnelle de Mumford et Shah. La fonctionnelle de Mumford et Shah et la variation totale apparaissent comme des critères régularisants "naturels" dans les problèmes inverses les plus classiques en traitement d'image. Nous donnons pour commencer une description élémentaire du problème du débruitage.

2.1 Le débruitage, problème le plus simple de reconstruction

Supposons que l'on observe une image (en dimension 1, un signal) qui est une matrice $n \times n$, $G = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, et supposons que l'on sache que cette image G est la somme d'un "bon" signal inconnu $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et d'un bruit Gaussien additif $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On suppose que les $n_{i,j}$ sont indépendants, de moyenne nulle, et de variance connue (ou estimée) σ^2. L'idée de base du débruitage d'image est que l'on va chercher à reconstruire le signal U à partir de G, en supposant que U a une certaine régularité *a priori*.

Il peut être commode d'adopter un point de vue continu : dans ce cas, G est remplacée par une fonction bornée de niveau de gris

$$g \ : \ \Omega \to [0,1]$$

où Ω représente "l'écran" (c'est donc généralement un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, par exemple $(0,1) \times (0,1)$). On fera alors l'hypothèse que $g(x)$ est la somme $u(x) + n(x)$ d'une "bonne" fonction u, ayant une certaine régularité, et d'un signal oscillant $n(x)$ dont on aimerait se débarrasser. On supposera que $\int_\Omega n(x)\,dx = 0$ et que $⨍_\Omega n(x)^2 := (1/|\Omega|)\int_\Omega n(x)^2\,dx = \sigma^2$ peut être correctement estimé. Le point de vue discret décrit correctement la structure des images numériques et est celui généralement adopté dans les approches statistiques de la reconstruction d'image. Le point de vue continu est commode pour étudier certaines méthodes de traitement d'images, décrites en termes de problèmes variationnels ou d'équations aux dérivées partielles.

Pour enlever le bruit, l'approche classique de Tychonov consiste à supposer que u doit avoir une norme minimale dans un certain espace vectoriel X qui va définir la régularité *a priori* de u. On est donc amené à résoudre le problème

$$\min \left\{ \|u\|_X \ : \ ⨍_\Omega |u(x) - g(x)|^2\,dx \ = \ \sigma^2 \right\}. \tag{1}$$

(La contrainte $\int_\Omega u = \int_\Omega g$ est satisfaite "automatiquement" si la norme $\|\cdot\|_X$ est homogène, *i.e.*, $\|u + \text{constante}\|_X = \|u\|_X$ pour tout u, ce qu'on supposera en général. Lorsque ce n'est pas le cas, il faut aussi la prendre en compte.)

La plupart du temps, il va exister un multiplicateur de Lagrange $\lambda > 0$ tel que ce problème est équivalent à
$$\min_{u \in X} \|u\|_X^s \ + \ \lambda \int_\Omega |u(x) - g(x)|^2 \, dx \tag{2}$$
(l'exposant s est choisi pour des raisons de commodité en fonction de l'espace X).

Dans les implémentations classiques de la méthode de Tychonov, $X = L^2$ ou H^1 (homogène). L'avantage est que le problème à résoudre est linéaire (bien sûr, on choisit $s = 2$), et que la solution est donnée facilement par une formule explicite $u = \phi * g$ où le filtre (de Wiener) ϕ dépend des données. Il se trouve que cette approche est très mal adaptée au traitement d'images. En effet, le premier critère $\int_\Omega |u|^2$ n'est pas du tout régularisant, alors que l'expérience montre que les images ont presque toujours une régularité spatiale assez forte. Le second critère $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$, en revanche, régularise trop : il est bien connu que les fonctions de H^1 ne peuvent pas être discontinues le long d'une ligne (en dimension deux). Il n'est donc pas possible que les bords des objets puissent être correctement reconstitués sur l'image restaurée, et celle-ci est donc floue.

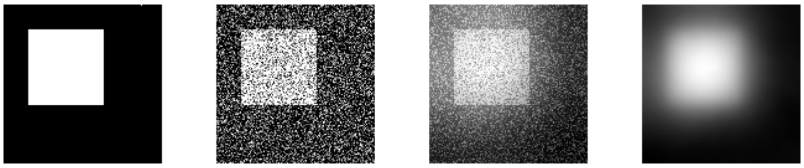

FIG. 1 – De gauche à droite : un carré blanc sur fond noir ; la même image, bruitée ; la reconstruction par la méthode de Tychonov en minimisant $\int |u|^2$; puis $\int |\nabla u|^2$.

2.2 La variation totale

Pour pallier cet inconvénient Rudin, Osher et Fatemi [145] ont proposé de remplacer la norme H^1 par la norme BV, c'est-à-dire, de minimiser (toujours sous la contrainte $⨍_\Omega |u - g|^2 = \sigma^2$) $\int_\Omega |\nabla u|$ — ou plus précisément, la masse $|Du|(\Omega)$ de la mesure Du, puisque dans ce cadre u n'est plus dérivable mais vérifie seulement que sa dérivée distributionnelle est une mesure de Radon bornée. L'avantage est qu'une fonction à variation bornée peut présenter des discontinuités le long de lignes, et donc, représenter un objet avec un bord net. Par contre, la résolution numérique du problème proposé par Rudin, Osher et Fatemi est bien plus complexe que celle de la méthode de Tychonov. Nous décrivons à présent notre contribution.

2.2.1 Une première approche [15]

Les résultats mentionnés dans cette partie sont obtenus en collaboration avec P. L. Lions. Commençons par décrire le problème de la reconstruction d'image (et non plus du simple débruitage) d'une manière un peu plus générale. L'image observée g ne s'écrit pas simplement $u + n$ ("image propre"+"bruit") mais plutôt $g(x) = (Au)(x) + n(x)$ où A est un opérateur linéaire continu. Pour simplifier nous supposerons que A est un opérateur de $L^2(\Omega)$, un cas un petit peu plus général est traité dans [15]. A est supposé connu, ce qui est bien sûr une énorme simplification. Le plus souvent, A correspond à un “flou”, donc à une convolution avec un noyau régularisant, et on essaie de déconvoler la fonction g (ce qui serait relativement facile en l'absence de bruit). On va supposer en particulier que $A1 = 1$ (“1” désigne la fonction identiquement égale à 1). On pourrait traiter presque de la même façon le cas où on sait juste que $A1 \neq 0$.

Le problème qu'on essaie de résoudre est le suivant (cf [145, 125]) :

$$\min \left\{ |Du|(\Omega) \;:\; u \in L^2(\Omega)\,,\, \int_\Omega Au = \int_\Omega g\;,\, \int_\Omega |Au - g|^2 = \sigma^2 \right\} \tag{3}$$

(pour alléger les notations on a supposé $|\Omega| = 1$).

L'existence d'une solution a d'abord été montrée dans [125] avec des restrictions sur A. Dans [15], on montre le résultat suivant

Théorème 2.1 [15] *Supposons que $\sigma \in (0, \|g - \int_\Omega g\|_{L^2(\Omega)}]$. Alors le problème (3) a une solution (unique si A est injective, sinon seule l'unicité de Au est garantie). De plus, il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda > 0$ tel que cette solution est aussi solution de*

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} |Du|(\Omega) \;+\; \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |(Au)(x) - g(x)|^2\, dx \tag{4}$$

dès que g est dans l'adhérence (dans L^2) de $\{Au \,:\, u \in BV(\Omega)\}$.

On étudie ensuite un algorithme pour résoudre (4). Cet algorithme résout en réalité le problème approché suivant, pour $\varepsilon > 0$ petit (fixé) :

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \int_\Omega \Phi_\varepsilon(|\nabla u(x)|)\, dx \;+\; \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |(Au)(x) - g(x)|^2\, dx, \tag{5}$$

avec Φ_ε donnée par

$$\Phi_\varepsilon(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} x^2 & \text{si } |x| \leq \varepsilon \\ |x| - \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{si } \varepsilon \leq |x| \leq \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \dfrac{\varepsilon}{2} x^2 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\varepsilon} - \varepsilon) & \text{si } |x| \geq \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

On montre facilement la $\Gamma-$convergence de la fonctionnelle du problème (5) vers celle du problème (4) quand $\varepsilon \to 0$, et celle des solutions de (5) vers la solution de (4) (*cf.* Appendice B). Pour résoudre (4) on considère la fonctionnelle

$$E(u, v) \;=\; \int_\Omega v|\nabla u|^2 \;+\; \frac{1}{v} \;+\; \lambda|Au - g|^2$$

définie pour $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in L^\infty(\Omega)$, $\varepsilon \leq v \leq 1/\varepsilon$. On choisit u^1, v^1 arbitraires, et on pose pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u^{n+1} \;&=\; \arg\min_{u \in H^1(\Omega)} E(u, v^n) \\ v^{n+1} \;&=\; \arg\min_{\varepsilon \leq v \leq 1/\varepsilon} E(u^{n+1}, v) \;=\; \left(\varepsilon \vee \frac{1}{|\nabla u^{n+1}|} \right) \wedge \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant, valide si Ω est suffisamment régulier et A est injectif.

Théorème 2.2 [15] *La suite (u_n) converge (faiblement dans $H^1(\Omega)$) vers le minimiseur de (5).*

Si A n'est pas injectif, la suite (u_n) est compacte et ses valeurs d'adhérence sont solutions de (5). Cet algorithme (qui est dans l'esprit très proche de l'algorithme qui sera décrit dans la section 3.3.2, page 19) n'est pas original, et a probablement été introduit par Vogel et Oman [154, 155]. Une autre preuve de convergence a été établie par Dobson et Vogel [97], et, plus récemment, par Chan et Mulet [78]. Enfin dans les notes de cours [29], nous donnons une preuve élémentaire de la convergence de cet algorithme dans le cadre discret.

La Figure 2 montre un exemple de débruitage obtenu par cette méthode.

FIG. 2 – Image bruitée et débruitée ($\sigma \simeq 30$).

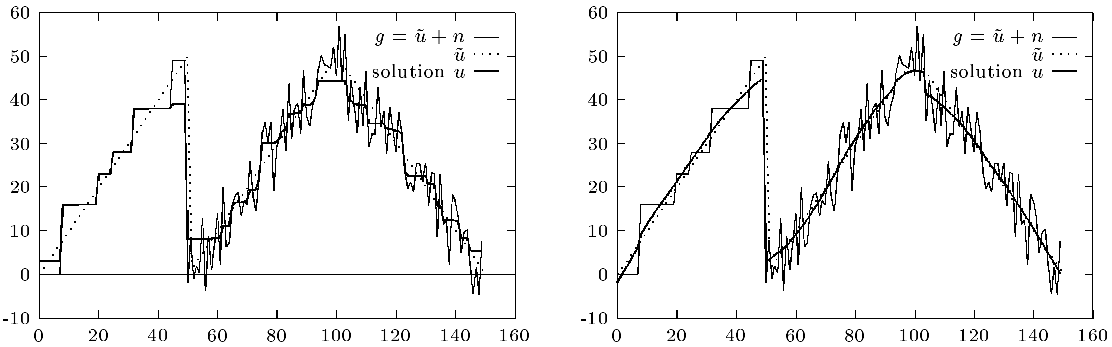

FIG. 3 – A gauche, un signal reconstruit par minimisation de la variation totale, à droite par minimisation de l'inf–convolée J de la variation totale et de la variation de la dérivée ($\tilde{u}$: original, g : bruité, u : reconstruit).

Dans [15], nous introduisons d'autres variantes du problème. Il apparaît que les images obtenues par minimisation de la variation totale ont tendance à être presque constantes par morceaux, en particulier, un signal affine est très mal reconstruit par ce critère. L'idée de base que nous proposons pour améliorer la méthode consiste à minimiser plutôt (toujours sous des contraintes du type $\int |Au - g|^2 = \sigma^2$) l'inf–convolution de critères comme (par exemple) la variation totale et la variation totale du gradient :

$$J(u) \;=\; \inf_{u_1+u_2=u} |Du_1|(\Omega) \;+\; |D(\nabla u_2)|(\Omega)$$

(ici $u_2 \in W^{1,1}(\Omega)$). Les résultats sont très bons, malheureusement on manque à l'heure actuelle d'une méthode efficace pour résoudre ce genre de problèmes. La Figure 3 montre un exemple de reconstruction de signal, d'abord par minimisation de la variation totale, puis par minimisation du critère J ci-dessus. Récemment, L. Vese et S. Osher ont étudié un modèle de décomposition des images en somme d'une image u_1 de petite variation totale et d'une image de texture u_2, fortement oscillante, qui rappelle notre approche [153].

2.2.2 Un algorithme nouveau pour la variation totale [20]

Description générale Dans cette section, nous supposons A = Identité, c'est-à-dire que nous ne regardons que le problème du débruitage. Une approche naturelle pour résoudre le problème (4) est de tenter de résoudre le problème dual donné par (*cf.* [20]) :

$$u \;=\; g - \Pi_{\mu K}(g) \tag{6}$$

où $\mu = 1/\lambda$, $\Pi_{\mu K}$ désigne la projection L^2 sur le convexe μK et

$$K \;=\; \text{fermeture de } \left\{ \operatorname{div} \xi \;:\; \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N), |\xi(x)| \leq 1 \, \forall \, x \in \Omega \right\}$$

(la fermeture est au sens L^2) est le plus grand convexe fermé tel que

$$|Du|(\Omega) \;=\; \sup_{v \in K} \langle v, u \rangle_{L^2}.$$

En d'autres termes, K est tel que

$$\delta_K \;:\; v \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

est la transformée de Legendre–Fenchel (dans $L^2(\Omega)$) de $J \,:\, u \mapsto |Du|(\Omega)$.

En dimension un, le calcul de la projection $\Pi_{\mu K}$ est élémentaire. En dimension supérieure, c'est moins évident. Nous proposons dans [20] un algorithme qui effectue cette projection. D'autres approches pratiquement équivalentes ont été proposées, par Chan, Golub et Mulet [76, 77], et par J. Carter [75]. Ces approches ont l'avantage de donner un résultat, apparemment, aussi dans le cas où A n'est pas l'identité. En revanche, aucune preuve de convergence n'est établie par ces auteurs.

L'algorithme de [20] est une méthode de point fixe posée dans le cadre discret. En dimension deux, les images $u = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $g = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont des éléments de l'espace Euclidien $X = \mathbb{R}^{n \times n}$. On introduit un opérateur gradient $\nabla \,:\, X \to Y = X \times X$ défini par

$$(\nabla u)_{i,j} \;=\; ((\nabla u)^1_{i,j}, (\nabla u)^2_{i,j})$$

avec

$$(\nabla u)^1_{i,j} \;=\; \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < n, \\ 0 & \text{si } i = n, \end{cases}$$

$$(\nabla u)^2_{i,j} \;=\; \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < n, \\ 0 & \text{si } j = n, \end{cases}$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$. La variation totale est définie par[1]

$$J(u) \;=\; \sum_{1 \le i,j \le n} |(\nabla u)_{i,j}|.$$

X et Y sont munis des produits scalaires euclidiens habituels. On pose $\mathrm{div} = -\nabla^*$, on a alors

$$J(u) \;=\; \sup_{v \in K} v \cdot u, \text{ avec}$$

$$K = \{\mathrm{div}\,\xi \;:\; \xi = (\xi_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in Y \;, |\xi_{i,j}| \le 1 \;\forall\; i,j = 1, \ldots, n\}\,.$$

A nouveau, le problème dual de la minimisation de

$$J(u) \;+\; \frac{\lambda}{2}\|u - g\|_X^2 \tag{7}$$

est donné par (6), avec $\mu = 1/\lambda$. On a donc à calculer la projection $\Pi_{\mu K}(g)$, c'est-à-dire à résoudre le problème

$$\min\left\{\|\mu\,\mathrm{div}\,\xi \;-\; g\|^2 \;:\; \xi \in Y\,,\; |\xi_{i,j}| \le 1 \;\forall i,j = 1, \ldots, n\right\} \tag{8}$$

L'équation d'Euler de ce problème est

$$-(\nabla(\mu\,\mathrm{div}\,\xi \;-\; g))_{i,j} \;+\; |(\nabla(\mu\,\mathrm{div}\,\xi - g))_{i,j}|\,\xi_{i,j} \;\;=\;\; 0$$

pour tout i, j. Choisissons $\tau > 0$, $\xi^0 = 0$, et pour tout $k \ge 0$ posons

$$\xi_{i,j}^{k+1} \;\;=\;\; \frac{\xi_{i,j}^k + \tau(\nabla(\mathrm{div}\,\xi^k - g/\mu))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(\mathrm{div}\,\xi^k - g/\mu))_{i,j}|}\,.$$

Théorème 2.3 [20] *Quand $k \to \infty$, (ξ^k) converge vers la solution ξ de (8) dès que $\tau < 1/8$.*

Remarque 2.4 Il apparaît en pratique que le seuil de convergence pour τ n'est pas $1/8$ mais $1/4$...

Application : débruitage Le problème original à résoudre pour débruiter l'image g n'est pas (7) (la version discrète de (4)) mais plutôt (3) ou son équivalent discret :

$$\min\left\{J(u) \;:\; \|u - g\|_X^2 \;\;=\;\; n^2\sigma^2\right\}. \tag{9}$$

Les problèmes (9) et (7) sont équivalent si μ est tel que $\|\Pi_{\mu K} g\|_X = n\sigma$. Il est donc naturel de proposer l'algorithme suivant : on fixe μ_0, et on calcule $v_0 = \Pi_{\mu_0 K}(g)$ et $\theta_0 = \|v_0\|_X$. Ensuite, pour tout $k \ge 1$, on pose $\mu_k = (n\sigma/\theta_{k-1})\mu_{k-1}$, et on recalcule $v_k = \Pi_{\mu_k K}(g)$ et $\theta_k = \|v_k\|_X$. On suppose (*cf.* les hypothèses d'existence dans le Théorème 2.1) que $0 \le n\sigma \le \|g - \langle g\rangle\|$, où $\langle g\rangle$ désigne la moyenne arithmétique des $g_{i,j}$. On a alors le résultat de convergence suivant.

Théorème 2.5 [20] *Quand $k \to \infty$, $\theta_k \to n\sigma$ et $g - v_k$ converge vers la solution unique de (9).*

La Figure 4 montre un exemple d'image débruitée avec cet algorithme.

[1] Il arrive parfois qu'on définisse la variation totale discrète par $\sum_{1\le i,j\le n} |(\nabla u)_{i,j}^1| + |(\nabla u)_{i,j}^2|$, ce qui peut simplifier certains calculs. Cependant ce genre de modification n'est pas anodin : malgré l'équivalence de ces normes, la deuxième est bien moins isotrope que la première, et pour le traitement d'images les résultats sont qualitativement très différents (*cf.* Fig. 8).

FIG. 4 – Image bruitée et débruitée ($\sigma \simeq 26$).

Autres applications Dans [20, 21], nous décrivons deux autres applications de l'algorithme décrit dans cette section. D'abord, nous regardons le cas où A n'est pas l'identité mais une projection sur un sous-espace de X (cas du zooming). Ensuite, nous proposons un algorithme pour calculer le mouvement par courbure moyenne, qui est en fait une implémentation rapide (dans le cas isotrope) de l'approche variationnelle de Almgren, Taylor et Wang [36].

2.3 Régularisation dans les espaces de Besov [11, 17]

Une alternative à la variation totale, imaginée par DeVore et Lucier [95], consiste à choisir pour X dans le problème (2) des espaces de Besov du type $X = B_q^\alpha(L^q(\Omega))$ avec $1/q = \alpha/2+1/2$. Cette approche a été étudiée dans [11], écrit en collaboration avec R. A. DeVore, N. y. Lee et B. J. Lucier. Un des arguments pour ce choix d'espaces est qu'il s'agit des espaces de Besov de régularité minimale qui s'injectent dans L^2. (La Fig. 1 et la section qui précède illustrent bien la nécessité de considérer des espaces dans lesquels les fonctions ont *grosso modo* un ordre de dérivée mais une régularité minimale.) Une autre raison est liée à la décroissance de l'erreur L^2 d'une image approximée par N coefficients d'ondelettes : si cette erreur est en $O(N^{-\alpha/2})$, alors la fonction de niveau de gris doit être dans $B_q^\alpha(L^q(\Omega))$ pour ce choix de q. (Voir l'introduction de [11] et les références pour plus de détails.)

Une autre bonne raison pour choisir ce type de normes, est qu'elles sont équivalentes à des expressions relativement simples en termes des coefficients de l'image dans une décomposition en ondelettes. Par exemple, supposons que $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ admet la décomposition

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2, k\in\mathbb{Z}, \psi} c_{j,k,\psi}\psi_{j,k}$$

où : $\psi(x_1, x_2)$ parcourt les trois ondelettes $\psi^{(1)}(x_1)\phi^{(1)}(x_2)$, $\phi^{(1)}(x_1)\psi^{(1)}(x_2)$, $\psi^{(1)}(x_1)\psi^{(1)}(x_2)$ (le couple $(\phi^{(1)}, \psi^{(1)})$ définissant une famille d'ondelettes orthogonales sur $\mathbb{R}$) ; et pour $j \in \mathbb{Z}^2, k \in \mathbb{Z}$, on définit $\psi_{j,k}(x) = 2^k\psi(2^kx - j)$. On a

$$\|u\|_{L^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2, k\in\mathbb{Z}, \psi} |c_{j,k,\psi}|^2$$

tandis que, si $1/q = \alpha/2 + 1/2$,

$$\|u\|_{B^\alpha_q(L^q(\Omega))} \simeq \left(\sum_k \sum_{j,\psi} |c_{j,k,\psi}|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(il s'agit en réalité d'une équivalence des normes). Dans le cas (par exemple) où $X = B^1_1(L^1(\Omega))$,

Fig. 5 – En haut, une image et sa version bruitée (écart-type du bruit = 32, pour des valeurs entre 0 et 255). En bas à gauche, la version reconstruite en minimisant la norme $B^1_1(L^1)$ (par "wavelet shrinkage"), avec le paramètre "critique" λ de [11]. A droite, en minimisant une version invariante par translation décrite dans [17], avec un paramètre déterminé "à la main".

le problème (2), s'écrit, en termes des coefficients en ondelettes

$$\min_{\{c_{j,k,\psi}\}} \sum_{j,k,\psi} |c_{j,k,\psi}| \ + \ \lambda \sum_{j,k,\psi} |c_{j,k,\psi} - d_{j,k,\psi}|^2$$

où $(d_{j,k,\psi})$ sont les coefficients de g. On voit qu'on se ramène simplement à la résolution de problèmes découplés de la forme

$$\min_c |c| \ + \ \lambda |c - d|^2$$

dont la solution est donnée par (en posant $\mu = 1/(2\lambda)$)

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } |d| \le \mu \\ \operatorname{sgn}(d)(|d| - \mu) & \text{si } |d| > \mu. \end{cases}$$

Pour obtenir les coefficients de u à partir de ceux de g, on les translate vers zéro de la quantité μ au plus : ceci est exactement l'algorithme de "wavelet shrinkage" de Donoho et Johnstone [98].

Par ailleurs, la distance L^2 entre u et g est donnée par

$$\sum_{j,k,\psi} (|d_{j,k,\psi}| \wedge \mu)^2$$

ce qui permet, après un tri des coefficients par ordre croissant de magnitude, de sélectionner rapidement le bon coefficient μ (ou λ) pour résoudre le problème (1). L'article [11] discute du choix de λ et de α, et contient diverses expériences de débruitage. Une autre section traite de la compression non linéaire d'images (on compresse une image u_0 en ne retenant que les N plus grands coefficients de la transformée en ondelettes, et on montre que l'erreur L^2 entre l'originale et la compressée est en $N^{-\alpha/2}\|u_0\|_{B^\alpha_q(L^q(\Omega))}$ ce qui permet de choisir correctement N).

Dans [17], on étudie plus précisément le flot de la norme $B^1_1(L^1)$, vu comme une représentation "espace–échelle" ("smoothing scale space"). Ce flot est implémenté d'une manière un peu différente, par une méthode de type "wavelet shrinkage", mais invariante par translation, cette invariance étant censée réduire les artefacts produits par la version traditionnelle (*cf.* Fig. 5).

3 Du débruitage à la segmentation d'images : la fonctionnelle de Mumford et Shah

Avant les travaux de Rudin, Osher et Fatemi, l'approche variationnelle la plus populaire pour reconstruire une image en préservant les discontinuités est dérivée de modèles statistiques qui remontent aux années 80. Nous exposons cette approche dans cette section, ainsi que l'approche continue de Mumford et Shah qui s'en inspire. Nous détaillons ensuite notre contribution sur les liens entre le discret et le continu.

3.1 L'approche de Geman et Geman

Dans leur célèbre article [112], D. et S. Geman proposent l'approche statistique suivante, pour restituer correctement un signal en préservant ses discontinuités. Si l'on connaît la distribution de probabilité $P(U)$ *a priori* du signal U, la probabilité de G sachant U est donnée par $P(G|U) = P(N = G - U) \sim \exp(-\|G-U\|^2/2\sigma^2)$. La règle de Bayes s'écrit

$$P(U|G)P(G) \;=\; P(G|U)P(U),$$

ce qui fait que $P(U|G)$, à une constante près, est $P(G|U)P(U)$, soit :

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n\times n}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i,j}(g_{i,j}-u_{i,j})^2\right) P(U).$$

L'idée de D. et S. Geman est de proposer la distribution suivante pour U : partant du principe que les scènes observées sont régulières par morceaux avec des sauts (aux bords des objets), ils introduisent un ensemble de sauts (représenté par un "processus de ligne")

$$L \;=\; \left\{(\ell_{i+\frac12,j})_{1\le i<n,1\le j\le n}, (\ell_{i,j+\frac12})_{1\le i\le n,1\le j<n}\right\},$$

où chaque variable $\ell_{\alpha,\beta}$ ne prend que les valeurs 0 ou 1 :

$$\ell_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un saut (un petit bord vertical) entre } i,j \text{ et } i+1,j \\ 0 & \text{si } U \text{ doit être régulière entre } i,j \text{ et } i+1,j, \end{cases}$$

$$\ell_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un saut (un petit bord horizontal) entre } i,j \text{ et } i,j+1 \\ 0 & \text{si } U \text{ doit être régulière entre } i,j \text{ et } i,j+1. \end{cases}$$

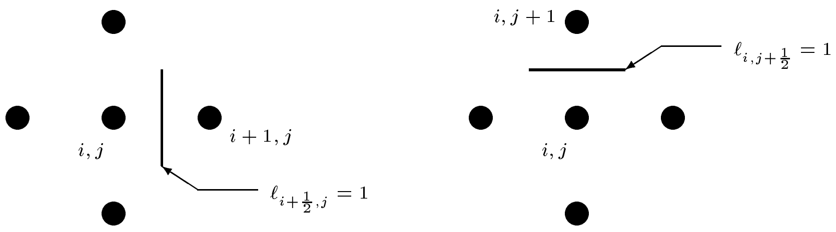

FIG. 6 – Le *processus de ligne* : $\ell_{i+\frac{1}{2},j}$ et $\ell_{i,j+\frac{1}{2}}$.

Ils supposent ensuite que (U, L) suit la loi de probabilité donnée par la densité suivante :

$$\begin{aligned} P(U,L) = \frac{1}{Z}\exp\Big\{ -\sum_{i,j} \Big(& \lambda(1-\ell_{i+\frac{1}{2},j})(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2 + \mu\ell_{i+\frac{1}{2},j} \\ & + \lambda(1-\ell_{i,j+\frac{1}{2}})(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2 + \mu\ell_{i,j+\frac{1}{2}} \Big) \Big\}. \end{aligned}$$

où λ, μ sont deux poids strictement positifs, et la constante Z est la fonction de partition, telle que $\sum_{U,L} P(U,L) = 1$ (la somme étant sur tous les états possibles (U,L)).

Le problème à résoudre est alors la maximisation de la probabilité

$$P(U,L|G) \sim e^{-E(U,L,G)}, \tag{10}$$

où l'énergie E est donnée par

$$\begin{aligned} E(U,L,G) = \sum_{i,j} \; & \lambda\Big((1-\ell_{i+\frac{1}{2},j})(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2 + (1-\ell_{i,j+\frac{1}{2}})(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2 \Big) \\ & + \mu\left(\ell_{i+\frac{1}{2},j} + \ell_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \\ & + \frac{1}{2\sigma^2}(g_{i,j}-u_{i,j})^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Geman et Geman proposent de maximiser (10) (ce qui est équivalent à minimiser E) au moyen d'une méthode de recuit simulé.

Cette méthode étant réputée relativement lente, beaucoup d'auteurs au cours des années 80 ont cherché à résoudre le problème par des approches déterministes (voir, par exemple, [109, 110, 111], plus récemment [50], ...) Dans toutes ces variantes, l'énergie E est approximée de façon itérative par des énergies "de moins en moins convexes". C'est en particulier l'idée centrale du livre de Blake et Zisserman <u>Visual Reconstruction</u> [54], où est introduit un algorithme baptisé "Graduated Non–Convexity" (GNC). Blake et Zisserman remarquent qu'on peut explicitement minimiser E par rapport à L, pour trouver l'énergie (que nous notons toujours E)

$$E(U) = \sum_{i,j} W_{\lambda,\mu}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + W_{\lambda,\mu}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{2\sigma^2}(g_{i,j} - u_{i,j})^2 \quad (12)$$

où le potentiel non–convexe $W_{\lambda,\mu}$ est donné par (voir Figure 7)

$$W_{\lambda,\mu}(x) = \min(\lambda x^2, \mu) = (\lambda x^2) \wedge \mu.$$

Cette énergie est appelée "weak membrane energy". A ce stade, le problème à résoudre ressemble

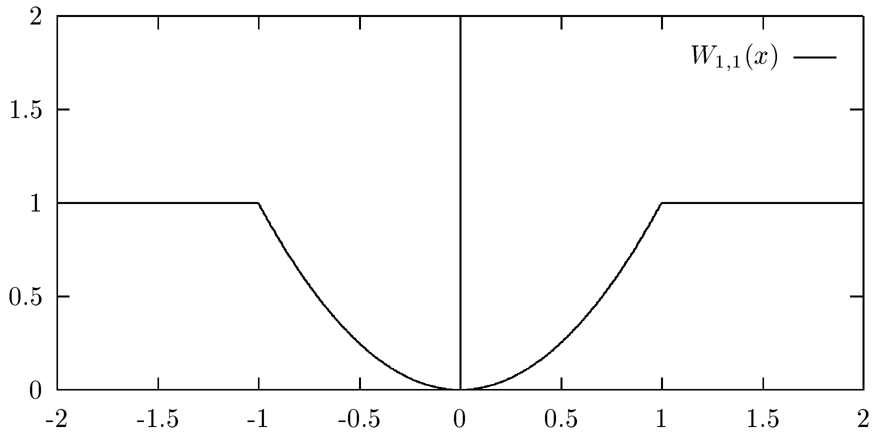

FIG. 7 – Le potentiel quadratique tronqué $W_{\lambda,\mu}(x)$ $(\lambda = \mu = 1)$.

beaucoup à l'approche classique de Tychonov, à ceci près qu'on a remplacé le terme (trop) régularisant $\int |\nabla u|^2$ (en discret, $\sum_{i,j} |u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2 + |u_{i,j+1} - u_{i,j}|^2$) par un terme qui ne pénalise plus excessivement les discontinuités (si μ n'est pas trop grand).

Ils introduisent ensuite une suite de potentiels $W^k_{\lambda,\mu}$ "plus convexes" que $W_{\lambda,\mu}$, et tendant vers $W_{\lambda,\mu}$ pour $k \to \infty$. Ils proposent alors de minimiser pour différentes valeurs de k l'énergie E dans laquelle $W_{\lambda,\mu}$ a été remplacé par $W^k_{\lambda,\mu}$ (en prenant pour point de départ à chaque étape le résultat de l'étape précédente). Il n'existe bien sûr aucun résultat général de convergence pour un tel algorithme.

3.2 La fonctionnelle de Mumford et Shah

Dans le but d'étudier les énergies (11) ou (12), Mumford et Shah (voir [135, 136]) proposent de les réécrire dans le cadre continu. L'image observée G devient une fonction de niveaux de gris $g(x,y)$, avec $(x,y) \in \Omega$, Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et $g(x,y) \in [0,1]$ pour presque tout (x,y). Ils remarquent ensuite que la variable L, ou l'ensemble $\{L = 1\}$, représente l'ensemble des sauts $K \subset \Omega$ d'une fonction régulière par morceaux $u(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$. Les différences $u_{i+1,j} - u_{i,j}$ (resp., $u_{i,j+1} - u_{i,j}$), sont des approximations des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ (resp., $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$). L'énergie qu'ils écrivent est donc

$$E(u,K) = \lambda \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u(x,y)|^2 \, dxdy + \mu \cdot \text{longueur}(K \cap \Omega) + \nu \int_{\Omega} (u(x,y) - g(x,y))^2 \, dxdy \quad (13)$$

où λ, μ sont des paramètres positifs. L'ensemble K est supposé compact de dimension un (idéalement, union finie de courbes régulières), et $u \in C^1(\Omega \setminus K)$.

L'étude de la fonctionnelle de Mumford et Shah s'est révélée très vite assez difficile. Une preuve en dimension deux d'existence d'un minimum a été donnée par Dal Maso, Morel et Solimini [87] (voir aussi [132]), tandis qu'en dimension N quelconque, ce problème a été résolu en deux temps. L'idée d'Ambrosio et De Giorgi [93] a d'abord été de considérer une formulation faible du problème : au lieu du couple (u, K) on considère une fonction $u \in BV(\Omega)$ et son ensemble de discontinuités essentielles S_u (S_u est défini comme le complémentaire des points de Lebesgue de u). On définit alors la fonctionnelle

$$E(u) = \lambda \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \mu \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \nu \int_\Omega (u(x) - g(x))^2 \, dx \tag{14}$$

(ici Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $g \in L^\infty(\Omega)$, et $\mathcal{H}^{N-1}$ est la mesure de Hausdorff $(N-1)$–dimensionnelle). $E(u)$ est définie par (14) lorsque $u \in SBV(\Omega)$, c'est-à-dire, lorsque la mesure Du est absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^N + \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$ (voir l'appendice A : Du est alors exactement $\nabla u(x) \, dx + (u_+(x) - u_-(x)) \nu_u(x) \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$, où $u_\pm$ sont les limites "approximatives" supérieures et inférieures de u en x, qui coïncident lorsque x est un point de Lebesgue, tandis que ν_u est la normale à S_u, orientée dans la direction où u croît, définie $\mathcal{H}^{N-1}$–presque partout sur S_u). Si $u \in L^1(\Omega) \setminus SBV(\Omega)$, on pose $E(u) = +\infty$.[2] L'existence d'un minimum pour le problème faible est alors la conséquence (immédiate) du théorème de compacité et de semicontinuité d'Ambrosio [37, 40, 38], *cf.* Théorème A.1, App. A.

Une fois l'existence pour le problème faible établie, l'équivalence avec le problème fort (la minimisation de $E(u, K)$) est la conséquence du résultat de De Giorgi, Carriero et Leaci [94] qui montrent que si $u \in SBV(\Omega)$ minimise l'énergie faible $E(u)$, alors S_u est essentiellement fermé dans Ω, i.e., $\mathcal{H}^{N-1}(\overline{S_u} \cap \Omega \setminus S_u) = 0$. Il suffit alors de poser $K = \overline{S_u}$ pour avoir que (u, K) est un minimiseur pour le problème fort. La fonction u est dans $C^1(\Omega \setminus K)$.

Il est à noter que plus récemment, Maddalena et Solimini [127] ont donné une jolie preuve d'existence directe pour le problème fort, en dimension quelconque.

Pour ce qui est de la régularité des solutions, un résultat de Guy David et Stephen Semmes, en dimension 2, montre que K est contenu dans une courbe "Ahlfors–régulière" de longueur finie [92, 91]. Guy David montre de plus qu'à un ensemble (fermé) de longueur nulle près, K est de classe $C^{1,\alpha}$ [89, 90]. La même régularité est également obtenue par Ambrosio, Fusco et Pallara, avec des techniques différentes, et leur résultat est valable en toute dimension [45, 42, 43]. Le résultat le plus fort semble être, en dimension 2, celui d'Alexis Bonnet [55, 56], qui affirme que K est (localement) l'union finie de courbes régulières, qui ne peuvent se rencontrer qu'en des points triples (à 120°), ou rencontrer $\partial\Omega$ orthogonalement, mais ce résultat n'est vrai que sous l'hypothèse, à ce jour invérifiable, que K est (localement) connexe.

[2] Plus précisément, il faudrait regarder $u \in GBV(\Omega) = \{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : (-k \vee u) \wedge k \in BV(\Omega) \, \forall k \in \mathbb{N}\}$ et poser $E(u) = +\infty$ si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \setminus GSBV(\Omega)$ où $GSBV$ est défini de façon similaire à partir de SBV. Ici, les minimiseurs de (14) satisfont un principe du maximum évident ($\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty$) et cette précision n'est pas fondamentale—plus loin en revanche, elle sera nécessaire dans l'énoncé des résultats de Γ–convergence. Voir l'appendice A.

On peut enfin mentionner que des résultats d'existence ont aussi été montrés pour des variantes de la fonctionnelle, notamment, par Fonseca et Fusco [103] qui ont étudié les minimiseurs de fonctionnelles du type $\int_\Omega |\nabla u|^p + \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_\Omega |u-g|^q$.

3.3 Mumford et Shah vs Blake et Zisserman : le lien discret–continu

3.3.1 en dimension un [4, 23]

La première étude à laquelle nous nous sommes intéressés, dans ce cadre, visait à répondre à la question suivante : en quel sens les énergies (11) (ou (12)) et (13) (ou (14)) sont-elles liées ? (en quel sens (11) est-elle la discrétisation de (13), ou (13) est-elle réellement la version continue de (11) ?)

Pour répondre à cette question, la fonctionnelle discrète est considérée comme dépendant d'un paramètre d'échelle $\varepsilon > 0$. Les coefficients doivent alors dépendre de ε. En dimension un, par exemple, on procède comme suit. On considère $g \in L^\infty(0,1)$, et pour tout ε on pose $n = [1/\varepsilon]$ (la partie entière de $1/\varepsilon$) et $g_i^\varepsilon = (1/\varepsilon)\int_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} g(s)\,ds$ pour $i = 1, \ldots, n$. On définit pour $U = (u_i)_{i=1,\ldots,n}$

$$E_\varepsilon(U) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} W_{\frac{1}{\varepsilon},1}(u_{i+1}-u_i) \;+\; \varepsilon\sum_{i=1}^{n}(u_i - g_i^\varepsilon)^2 \tag{15}$$

Les raisons du choix de ce “scaling” pour W sont claires : lorsque $u_{i+1}-u_i$ est petit, on veut que le terme se comporte comme l'intégrale de $(u')^2$, *i.e.*, comme $\varepsilon \cdot (u_{i+1} - u_i/\varepsilon)^2 = (u_{i+1}-u_i)^2/\varepsilon$, lorsqu'il est grand, on veut qu'il se comporte comme la mesure $\mathcal{H}^0$ (de comptage) du saut, et vaille donc 1. En dimension un, la fonctionnelle (faible) de Mumford et Shah s'écrit

$$E(u) \;=\; \int_0^1 |u'(x)|^2\,dx \;+\; \mathcal{H}^0(S_u) \;+\; \int_0^1 (u(x)-g(x))^2\,dx \tag{16}$$

(pour $u \in SBV(0,1)$). On étend ces deux fonctionnelles à tout l'espace $L^1(0,1)$ en posant $E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon((u_i)_{i=1,\ldots,n})$ lorsque $u = \sum_{i=1}^n u_i \chi_{((i-1)\varepsilon, i\varepsilon)}$, et $E_\varepsilon(u) = +\infty$ sinon, de même, on pose $E(u) = +\infty$ lorsque $u \in L^1(0,1) \setminus SBV(0,1)$.

Théorème 3.1 [4] *E_ε Γ–converge vers E quand $\varepsilon \to 0$ dans $L^1(0,1)$. De plus, si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est telle que $\sup_{\varepsilon>0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$, alors il existe $u \in SBV(0,1)$ et une sous-suite u_{ε_k} telle que $u_{\varepsilon_k} \to u$ dans $L^1(0,1)$.*

Le fait que E_ε Γ–converge vers E quand $\varepsilon \to 0$ dans $L^1(0,1)$ se traduit par les deux propriétés suivantes (cf Appendice B, point **1.**) :

i. Pour tout $u \in L^1(0,1)$ et toute suite u_{ε_k} tendant vers u dans L^1, on a l'inégalité $E(u) \leq \liminf_{k\to\infty} E_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})$;
ii. Pour tout $u \in L^1(0,1)$, il existe une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tendant vers u dans L^1 quand $\varepsilon \to 0$, telle que $\limsup_{k\to\infty} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E(u)$.

La conséquence directe de ce théorème est que si pour chaque ε_k d'une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ tendant vers zéro, u_k est un minimiseur de E_{ε_k}, la suite $(u_k)_{k\geq1}$ est relativement compacte dans L^1 et toute limite u est un minimiseur de E. Notons par ailleurs que la minimisation de E_{ε_k}, pour k

fixé, peut s'effectuer au moyen d'un algorithme très simple de programmation dynamique (dû à D. Mumford), décrit par exemple dans [23].

Enfin, il est possible d'établir une preuve assez simple du Théorème 3.1 sans se placer du tout dans le cadre des fonctions SBV mais en considérant les fonctions dans $H^1((0,1)\setminus K)$ où K est un ensemble fini de sauts (comme le fait A. Braides dans [64]).

Remarque 3.2 On vérifie assez facilement que d'autres changements d'échelle que celui considéré dans (15) conduisent à des Γ–limites triviales (en général, 0 ou $\int_0^1 |u'|^2 + (u-g)^2)$.

3.3.2 en dimension deux ou plus [6, 7]

En dimension supérieure, le problème a été étudié dans les articles [6, 7], par deux approches assez différentes.

Un premier résultat, en dimension deux Dans le premier de ces articles, on se place dans le carré $\Omega = (0,1)^2$. Etant donnée $g \in L^\infty(\Omega)$, on pose, pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon = 1/n$ et pour $i,j = 1,\ldots,n$, on pose $C^\varepsilon_{i,j} = ((i-1)\varepsilon, i\varepsilon) \times ((j-1)\varepsilon, j\varepsilon)$ et $g^\varepsilon_{i,j} = (1/\varepsilon^2)\int_{C^\varepsilon_{i,j}} g$. On définit pour $U = (u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ les énergies

$$E_\varepsilon(U) \;=\; \sum_{i<n,j} W_{1,\varepsilon}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \;+\; \sum_{j<n,i} W_{1,\varepsilon}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \;+\; \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n} (u_{i,j} - g^\varepsilon_{i,j})^2 \qquad (17)$$

et pour $u \in L^1(\Omega)$, on pose $E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon((u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n})$ si $u = \sum_{i,j} u_{i,j}\chi_{C^\varepsilon_{i,j}}$, $E_\varepsilon(u) = +\infty$ sinon. On considère ce scaling désormais parce que lorsque, par exemple, la différence $u_{i+1,j} - u_{i,j}$ est petite, on veut que le terme correspondant $W_{1,\varepsilon}(u_{i+1,j} - u_{i,j})$ soit de l'ordre de $\int_{C^\varepsilon_{i,j}} (\partial_1 u)^2$, soit $\varepsilon^2((u_{i+1,j} - u_{i,j})/\varepsilon)^2$, tandis que lorsque cette différence est grande, on veut que ce même terme soit de l'ordre de ε, c'est-à-dire la longueur d'un petit morceau de "bord" vertical entre les points (i,j) et $(i+1,j)$.

Si on cherche à démontrer un analogue du Théorème 3.1 pour les fonctionnelles, E_ε, on butte bien vite sur un écueil : l'énergie E_ε, contrairement à la fonctionnelle de Mumford et Shah, est clairement anisotrope. Si par exemple g est la fonction caractéristique du carré $(1/4, 3/4)^2$, et u une approximation correcte de g, pour ε petit $E_\varepsilon(u) \sim 2$ (la longueur des côtés du carré). Si maintenant g est la fonction caractéristique du même carré pivoté de 45°, et u une bonne approximation, on aura $E_\varepsilon(u) \sim 2\sqrt{2}$.

On considère donc une variante de la longueur de Hausdorff, à savoir la "métrique du chauffeur de taxi", donnée par $\Lambda(S) = \int_S |\nu_1| + |\nu_2| \, d\mathcal{H}^1$ pour tout ensemble rectifiable S de dimension 1. Ici $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est le vecteur normal à S exprimé dans la base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$. On introduit la variante anisotrope suivante de la fonctionnelle de Mumford et Shah :

$$E(u) \;=\; \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \;+\; \Lambda(S_u) \;+\; \int_\Omega (u(x) - g(x))^2 \, dx. \qquad (18)$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.3 [6] *E_ε Γ–converge vers E quand $\varepsilon \to 0$ dans $L^1(\Omega)$. De plus, si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est telle que $\sup_{\varepsilon>0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$ et $\sup_{\varepsilon>0} \|u_\varepsilon\|_\infty < +\infty$, alors il existe $u \in SBV(\Omega)$ et une sous-suite u_{ε_k} telle que $u_{\varepsilon_k} \to u$ dans $L^1(\Omega)$.*

Ce résultat entraîne à nouveau la convergence de sous-suites des minimiseurs de E_ε vers un minimiseur de E.

Ce théorème est montré dans [6] par une approche “constructive”. Si on considère u et u_ε qui tend vers u, on va construire u'_ε dans SBV telle que $E(u'_\varepsilon) \simeq E_\varepsilon(u_\varepsilon)$ pour déduire l'inégalité $E(u) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon)$. De même, on construit explicitement un u_ε qui tend vers u et tel que $\limsup_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E(u)$.

Si l'on souhaite définir au moyen de différences finies une énergie de type Blake et Zisserman qui soit une approximation “plus isotrope” de la fonctionnelle de Mumford et Shah, il va falloir faire intervenir plus de directions dans la fonctionnelle discrète, qui va devoir prendre en compte non seulement les différences $u_{i+1,j} - u_{i,j}$ et $u_{i,j+1} - u_{i,j}$, mais aussi, par exemple, des différences du type $u_{i+1,j+1} - u_{i,j}$ et $u_{i,j+1} - u_{i+1,j}$, etc... On se rend compte alors que la méthode de démonstration de [6] est assez inadaptée à ce genre de généralisation.

De meilleures approximations, en dimension quelconque L'idée d'une autre méthode, moins limitée au cas particulier que nous venons de décrire, pour montrer le Théorème 3.3, ainsi que des variantes plus générales est essentiellement due à M. Gobbino. De Giorgi avait remarqué que les énergies (15) et (17) s'écrivaient de façon plus élégante, respectivement

$$E_\varepsilon(U) \;=\; \varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{(u_{i+1}-u_i)^2}{\varepsilon}\right) \;+\; \sum_{i=1}^{n} (u_i - g_i^\varepsilon)^2 \right\}, \quad \text{et}$$

$$E_\varepsilon(U) \;=\; \varepsilon^2 \left\{ \sum_{i<n,j} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2}{\varepsilon}\right) \;+\; \sum_{j<n,i} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2}{\varepsilon}\right) \;+\; \sum_{i,j=1}^{n} (u_{i,j} - g_{i,j}^\varepsilon)^2 \right\},$$

avec $f(t) = t \wedge 1$. Il avait alors suggéré que d'une façon générale, on pourrait démontrer la Γ–convergence de fonctionnelles du type

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{atan}\left(\frac{(u(x)-u(x+\varepsilon\xi))^2}{\varepsilon}\right) e^{-|\xi|^2}\,dxd\xi$$

vers la fonctionnelle de Mumford et Shah (dans laquelle on ignore le terme en $\int(u-g)^2$ dont l'approximation ne pose aucun problème)

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\,dx + \mu\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$$

avec des paramètres λ et μ à déterminer. Dans la fonctionnelle de De Giorgi, l'arctangente est juste un cas particulier de fonction f croissante, nulle en zéro, ayant une dérivée non nulle en zéro et tendant vers une constante en $+\infty$ (c'est une version régulière de $t \wedge 1$). De même, $e^{-|\xi|^2}$ peut être remplacée par n'importe quelle fonction ϕ radiale, décroissant suffisamment rapidement à l'infini (éventuellement à support compact). La forme générale de cette fonctionnelle est donc

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{(u(x)-u(x+\varepsilon\xi))^2}{\varepsilon}\right)\phi(\xi)\,dx d\xi.$$

Cette conjecture de De Giorgi a été démontrée par M. Gobbino [115], par une méthode assez simple de "slicing". L'idée est d'écrire la fonctionnelle sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|\,d\xi \int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{N-1}(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{(u(z+t\xi)-u(z+(t+\varepsilon)\xi))^2}{\varepsilon}\right)\,dt$$

et d'étudier la Γ–convergence de la fonctionnelle donnée par la dernière intégrale (en t), qui est de dimension un. Pour étudier cette intégrale, on propose dans [7] d'effectuer un changement de variable $t = k\varepsilon + s\varepsilon$, $k\in\mathbb{Z}$, $s\in(0,1)$, et de l'écrire

$$\int_0^1\left(\varepsilon\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{(u(z+s\varepsilon\xi+k\varepsilon\xi)-u(z+s\varepsilon\xi+(k+1)\varepsilon\xi))^2}{\varepsilon}\right)\right)\,ds$$

On est alors ramené au Théorème 3.1, qui donne la Γ–limite de ces sommes. On refait enfin le chemin en sens inverse pour trouver l'expression générale de la Γ–limite :

$$f'(0)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\xi)^2\phi(\xi)\,d\xi\right)\,dx\;+\;f(+\infty)\int_{S_u}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nu_u\cdot\xi|\phi(\xi)\,d\xi\right)\,d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Lorsque $f = \operatorname{arc\,tg}$ et $\phi = e^{-|\cdot|^2}$, on calcule aisément les valeurs des coefficients λ et μ, respectivement $\sqrt{\pi}^N/2$ et $\sqrt{\pi}^{N+1}/2$.

L'objet principal de [7] est d'étendre ces techniques au cas discret. La forme générale de la fonctionnelle discrète (17) (sans le terme en $(u-g)^2$), en dimension quelconque, pour Ω ouvert borné (Lipschitz) de $\mathbb{R}^N$, est donnée par

$$F_\varepsilon(u)\;=\;\varepsilon^N\sum_{x\in\varepsilon\mathbb{Z}^N\cap\Omega}\;\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^N\\ x+\varepsilon\xi\in\Omega}}\frac{1}{\varepsilon}f_\xi\left(\frac{(u(x)-u(x+\varepsilon\xi))^2}{\varepsilon}\right)\phi(\xi)\,, \tag{19}$$

lorsque $u\in L^1(\Omega)$ est de la forme $u=\sum_{x\in\varepsilon\mathbb{Z}^N}u(x)\chi_{C(x)\cap\Omega}$, où $C(x)$ est l'hypercube $x+(-\varepsilon/2,\varepsilon/2)^N$. (On pose $F_\varepsilon(u)=+\infty$ si u n'est pas de cette forme.) Ici $\phi:\mathbb{Z}^N\to[0,+\infty)$ est paire, telle que $\phi(0)=0$, $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}|\xi|^2\phi(\xi)<+\infty$, et $\phi(e_i)>0$ pour $i=1,\dots,N$, où $(e_i)_{1\le i\le N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Les fonctions f_ξ (définies lorsque $\phi(\xi)\neq 0$) sont croissantes, bornées, vérifient $f_\xi(0)=0$, $f_\xi'(0)=\alpha_\xi>0$, $\lim_{t\to+\infty}f_\xi(t)=\beta_\xi$, et $f_\xi(t)\le(\alpha_\xi t)\wedge\beta_\xi$. On pose ensuite

$$F(u)=\int_\Omega\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\alpha_\xi\phi(\xi)|\langle\nabla u(x),\xi\rangle|^2\,dx\;+\;\int_{S_u}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\beta_\xi\phi(\xi)|\langle\nu_u(x),\xi\rangle|\,d\mathcal{H}^{N-1}(x) \tag{20}$$

pour $u\in GSBV(\Omega)$ (et $+\infty$ sinon). On a alors les résultats suivants :

Théorème 3.4 [7] *Quand $\varepsilon\to 0$, F_ε Γ–converge vers F dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p\in[1,+\infty)$.*

Théorème 3.5 [7] *Soit $p \in [1, +\infty)$, $g \in L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et pour tout $\varepsilon > 0$ soit u_ε qui minimise*

$$F_\varepsilon(u) \;+\; \int_\Omega |u(x) - g(x)|^p \, dx.$$

Alors (u_ε) est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$, et si u est la limite d'une sous-suite de (u_ε), u est dans $SBV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ et minimise

$$F(u) \;+\; \int_\Omega |u(x) - g(x)|^p \, dx.$$

Ces résultats permettent de mieux contrôler le défaut d'anisotropie de la fonctionnelle limite (qui reste de toute façon anisotrope [3]). Des exemples sont montrés dans [7]. En particulier, on compare les cas des énergies

$$E^1_\varepsilon(u) \;=\; \varepsilon^2 \sum_{i,j} \frac{\beta_1}{\varepsilon} f\left(\alpha_1 \frac{|u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2}{\beta_1 \varepsilon}\right) \;+\; \frac{\beta_1}{\varepsilon} f\left(\alpha_1 \frac{|u_{i,j+1} - u_{i,j}|^2}{\beta_1 \varepsilon}\right) \;+\; |u_{i,j} - g^\varepsilon_{i,j}|^2,$$

et

$$E^2_\varepsilon(u) \;=\; \varepsilon^2 \sum_{i,j} \frac{\beta_2}{\varepsilon} f\left(\alpha_2 \frac{|u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2}{\beta_2 \varepsilon}\right) \;+\; \frac{\beta_2}{\varepsilon} f\left(\alpha_2 \frac{|u_{i,j+1} - u_{i,j}|^2}{\beta_2 \varepsilon}\right) \;+$$

$$+\; \frac{\beta'_2}{\varepsilon} f\left(\alpha'_2 \frac{|u_{i+1,j+1} - u_{i,j}|^2}{\beta'_2 \varepsilon}\right) \;+\; \frac{\beta'_2}{\varepsilon} f\left(\alpha'_2 \frac{|u_{i-1,j+1} - u_{i,j}|^2}{\beta'_2 \varepsilon}\right) \;+\; |u_{i,j} - g^\varepsilon_{i,j}|^2.$$

où $\varepsilon = 1/n$, $n \geq 1$, et $i, j \in \mathbb{Z}$ sont tels que $(\varepsilon i, \varepsilon j) \in \Omega = (0,1)^2$. $g^\varepsilon_{i,j}$ est la moyenne sur le carré $((i-1)\varepsilon, i\varepsilon) \times ((j-1)\varepsilon, j\varepsilon)$ de la fonction $g \in L^\infty(\Omega)$. D'après le Théorème 3.5, les minimiseurs de E^1_ε et E^2_ε vont converger, lorsque $\varepsilon \to 0$ ($n \to +\infty$), vers des minimiseurs de respectivement

$$E^1_\infty(u) = \lambda_1 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \;+\; \mu_1 \Lambda_1(S_u) \;+\; \int_\Omega |u(x) - g(x)|^2 \, dx$$

et

$$E^2_\infty(u) = \lambda_2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \;+\; \mu_2 \Lambda_2(S_u) \;+\; \int_\Omega |u(x) - g(x)|^2 \, dx,$$

(pour $u \in GSBV(\Omega)$, $+\infty$ sinon), avec $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + 2\alpha'_2$, et

$$\mu_1 \Lambda_1(S_u) \;=\; \int_{S_u} \beta_1 (|\nu_1(x)| + |\nu_2(x)|) \, d\mathcal{H}^1(x),$$

$$\mu_2 \Lambda_2(S_u) \;=\; \int_{S_u} \beta_2 (|\nu_1(x)| + |\nu_2(x)|) + \beta'_2 (|\nu_1(x) - \nu_2(x)| + |\nu_1(x) + \nu_2(x)|) \, d\mathcal{H}^1(x),$$

$(\nu_1(x), \nu_2(x))$ étant toujours le vecteur normal à S_u en x. Pour rendre Λ_2 le plus isotrope possible il faut prendre $\beta'_2 = \beta_2/\sqrt{2}$. On est amené à comparer deux énergies de type Mumford et Shah, l'une définie avec la longueur

$$\Lambda_1(E) \;=\; \int_E (|\nu_1(x)| + |\nu_2(x)|) \, d\mathcal{H}^1(x)$$

(qui est la longueur du “chauffeur de taxi” du Théorème 3.3) et l'autre la longueur

$$\Lambda_2(E) \;=\; \frac{1}{2} \int_E \left(|\nu_1(x)| + |\nu_2(x)| + \frac{|\nu_1(x) - \nu_2(x)| + |\nu_1(x) + \nu_2(x)|}{\sqrt{2}} \right) d\mathcal{H}^1(x).$$

On remarque que $\Lambda_2(E)$ n'est autre que la moyenne des longueurs Λ_1 de E et de E pivoté d'un angle de 45°. La figure 8 montre une image débruitée à l'aide des énergies E^1_ε et E^2_ε. On a choisi $f(t) = (2/\pi) \operatorname{atan}(\pi t/2)$. Clairement, la deuxième énergie (image du milieu) produit un meilleur résultat (moins de “blocs”).

[3] Tant que le support de ϕ est fini, ce qui est en pratique toujours le cas.

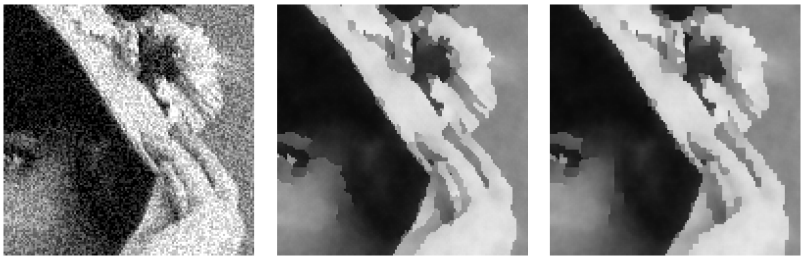

FIG. 8 – Une image bruitée (écart-type = 25 pour des valeurs entre 0 et 255) et les résultats de la minimisation de E_n^2 (au milieu) et de E_n^1 (à droite). (Voir [7] pour plus de détails.)

L'algorithme En pratique, l'algorithme utilisé pour minimiser E_ε^1 ou E_ε^2 est un algorithme itératif qui est basé sur l'observation suivante : si on choisit f concave, $f'(0) = 1$, on peut toujours écrire

$$f(t) \;=\; \min_{\ell\in[0,1]} \ell\, t \,+\, \psi(\ell)$$

pour une certaine fonction ψ convexe ($\psi(\ell) = (-f)^*(-\ell)$ où $(-f)^*$ est la transformée de Legendre de $-f$). De plus, le minimum est atteint pour $\ell = f'(t)$. L'algorithme utilisé pour calculer les images de la Figure 8 consiste à remplacer dans (par exemple) E_ε^1 chaque terme du type

$$\frac{\beta_1}{\varepsilon} f\left(\alpha_1 \frac{|u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2}{\beta_1 \varepsilon}\right)$$

par un terme de la forme

$$\alpha_1\, \ell_{i+\frac12,j}\, \frac{|u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2}{\varepsilon^2} \;+\; \frac{\beta_1}{\varepsilon}\, \psi(\ell_{i+\frac12,j}).$$

Il faut donc faire intervenir autant de variables "$\ell_{\cdot,\cdot}$" qu'il y a de différences dans la somme définissant l'énergie : on voit ainsi réapparaître le "processus de ligne" de Geman et Geman. L'algorithme, à ce stade, consiste à minimiser alternativement l'énergie par rapport aux variables $(u_{i,j})$ (dans sa nouvelle expression, l'énergie est quadratique en $(u_{i,j})$ et cette étape revient à résoudre un système linéaire) et par rapport aux variables $(\ell_{\cdot,\cdot})$ (ce qui se fait explicitement en posant $\ell_{i+\frac12,j} = f'(\alpha_1 |u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2/(\beta_1\varepsilon))$). Il est bien sûr impossible d'établir la convergence de cet algorithme, qui fournit de bons résultats pour des choix de f raisonnables (*cf.* Fig. 8).

3.4 Des approximations par éléments finis

Dans le but non plus d'étudier les énergies de type Blake et Zisserman, mais de tenter de produire de meilleures approximations de la fonctionnelle de Mumford et Shah, en particulier pour ce qui est de l'anisotropie du terme de longueur, nous avons cherché à mettre au point une approche par éléments finis. Nous décrivons ici deux articles, l'un écrit en collaboration avec G. Dal Maso [10], le second avec B. Bourdin [2]. D'autres études de ce type ont été réalisées. A chaque fois, contrairement à ce que nous allons présenter, l'approche des auteurs (G. Bellettini et A. Coscia [52], S. Finzi-Vita et P. Perugia [102], B. Bourdin [62]) consistait à étudier une discrétisation en éléments finis de l'approximation d'Ambrosio et Tortorelli [46, 47] par des fonctionnelles elliptiques.

3.4.1 Un premier modèle [10]

Si on cherche à approximer l'énergie de Mumford et Shah dans des espaces d'éléments finis, il n'est pas clair *a priori* qu'on puisse aisément se débarrasser de l'anisotropie. En effet, à moins d'utiliser des maillages structurés de façon aléatoire, et de compter sur une espèce de propriété d'ergodicité pour qu'à la limite l'anisotropie disparaisse, la géométrie du maillage devrait en général influer fortement sur la manière de mesurer la longueur d'une discontinuité. D'un côté, on peut décider de s'en tenir à une structure de maillage fixée et tenter de déterminer, comme dans le Théorème 3.4, la forme de l'anisotropie qui va en dériver. Ce point de vue a été étudié par Matteo Negri [138, 139]. Avec G. Dal Maso [10] puis B. Bourdin [2], nous avons adopté un point de vue très différent, dans le but de tenter d'approximer correctement le terme de longueur isotrope qui apparaît dans la fonctionnelle de Mumford et Shah.

L'idée introduite dans [10] est de considérer non pas une triangulation d'un domaine Ω mais *toutes* les triangulations possibles à une échelle donnée. En pratique, cela revient à dire qu'on va chercher à optimiser non seulement la fonction, mais aussi le maillage sur lequel elle est représentée. Une triangulation de Ω est définie comme étant une famille finie de triangles fermés recouvrant Ω et tels que deux de ces triangles qui se touchent ont exactement soit une arête soit un sommet commun. Etant donné un angle θ_0 non nul, compris entre 0 et 60°, et une fonction $\omega(\varepsilon)$ avec $\omega(\varepsilon) \geq \kappa\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (où $\kappa > 1$) et $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \omega(\varepsilon) = 0$, on définit pour tout $\varepsilon > 0$ $\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega) = \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega, \omega, \theta_0)$ comme étant l'ensemble de toutes les triangulations de Ω dont les triangles ont des arêtes de longueur comprise entre ε et $\omega(\varepsilon)$ et des angles supérieurs ou égaux à θ_0. On considère ensuite l'ensemble $V_\varepsilon(\Omega)$ des fonctions continues $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $\mathbb{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$ telle que u est affine sur chaque triangle $T \in \mathbb{T}$. (Notons que pour une $u \in V_\varepsilon(\Omega)$, il peut y avoir plusieurs triangulations $\mathbb{T}$ avec cette propriété.)

On choisit alors, comme dans la section 3.3.2, une fonction croissante $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ vérifiant

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(t)}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to +\infty} f(t) = f_\infty < +\infty$$

(par exemple $t \wedge f_\infty$). Posons $\mu = f_\infty \sin\theta_0$. On considère les fonctionnelles $F_\varepsilon : L^p(\Omega) \to [0, +\infty]$ ($p \in [1, \infty)$ est arbitraire) et $F : L^p(\Omega) \to [0, +\infty]$ définies par

$$F_\varepsilon(u) \ = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_\Omega f(\varepsilon|\nabla u(x)|^2)\,dx & \text{si } u \in V_\varepsilon(\Omega), \\ +\infty & \text{si } u \in L^p(\Omega) \setminus V_\varepsilon(\Omega), \end{cases} \tag{21}$$

$$F(u) \ = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \ + \ \mu\,\mathcal{H}^1(S_u) & \text{si } u \in L^p(\Omega) \cap GSBV(\Omega), \\ +\infty & \text{si } u \in L^p(\Omega) \setminus GSBV(\Omega). \end{cases} \tag{22}$$

Théorème 3.6 [10] *Il existe Θ, $18° < \Theta \leq 60°$, et κ_0, $1 < \kappa_0 \leq 6$, tels que si $0 < \theta_0 < \Theta$ et $\kappa \geq \kappa_0$, alors (F_ε) Γ–converge vers F dans $L^p(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.*

La preuve de ce théorème se fait de façon constructive. Il faut montrer, comme toujours, que

(i.) Pour $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, u tels que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^p(\Omega)$, $F(u) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon)$;

(ii.) Pour tout u, on peut construire u_ε qui tend vers u avec $\limsup_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le F(u)$.

Pour le premier point, la démarche suit à peu près la preuve du Théorème 3.3. On se place pour simplifier dans le cas où $f(t) = t \wedge f_\infty$. On va construire des fonctions u'_ε telles que $u'_\varepsilon \sim u_\varepsilon$ (en particulier, $u'_\varepsilon \to u$), et $F(u'_\varepsilon) \sim F_\varepsilon(u_\varepsilon)$. F étant semi-continue, on déduit $F(u) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Pour obtenir u'_ε à partir de u_ε, on remarque que l'énergie $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ s'écrit (pour une triangulation $\mathbb{T}_\varepsilon$ adaptée à u)

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \;=\; \sum_{T\in\mathbb{T}_\varepsilon} |T\cap\Omega| \min\left\{|\nabla u_\varepsilon|^2, \frac{f_\infty}{\varepsilon}\right\},$$

où le gradient ∇u_ε est constant sur chaque triangle T. On appelle $\mathbb{T}^1_\varepsilon$ l'ensemble des triangles de $\mathbb{T}_\varepsilon$ sur lesquels $|\nabla u_\varepsilon|^2 > f_\infty/\varepsilon$. Si on pose $S_\varepsilon = \Omega \cap \bigcup_{T\in\mathbb{T}^1_\varepsilon} \mathbb{T}$, $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ contrôle $\int_{\Omega\setminus S_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2$. On laisse donc u_ε inchangée sur $\Omega\setminus S_\varepsilon$. Sur la plupart des triangles T de $\mathbb{T}^1_\varepsilon$, la pente de u_ε est grande (par rapport à $1/\sqrt{\varepsilon}$) le long de deux arêtes au moins du triangle (sinon on ne pourrait avoir $|\nabla u_\varepsilon|^2 > f_\infty/\varepsilon$). On introduit alors le segment S_T joignant le milieu de ces deux arêtes et on définit u'_ε sur T comme étant la fonction affine de chaque côté de S_T, discontinue à travers S_T, de plus petit gradient. On vérifie aisément que si $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega,\omega,\theta_0)$, les triangles de T vérifient $|T|/\varepsilon \ge \sin\theta_0 \mathcal{H}^1(S_T)$. Or sur S_ε, $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ contrôle $f_\infty \sum_{T\in\mathbb{T}^1_\varepsilon} |T\cap\Omega|/\varepsilon$. On arrive alors à montrer (à pas mal de détails techniques près) que cette somme majore à peu près $f_\infty \sin\theta_0 \mathcal{H}^1(S_{u'_\varepsilon})$, et que le terme $\int_{S_\varepsilon} |\nabla u'_\varepsilon|^2$ est une petite perturbation. On en déduit que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \gtrsim F(u'_\varepsilon)$. Par construction, u'_ε ne diffère de u_ε que sur un ensemble petit (en effet si $\liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$, ce qu'on peut toujours supposer, alors $|S_\varepsilon| \le c\varepsilon$) et on a facilement que $u'_\varepsilon \to u$.

Remarque 3.7 Cette preuve peut être simplifiée. Dans [2], on montre le lemme suivant, qui est une variante du Théorème A.1 d'Ambrosio :

Lemme 3.8 [2] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,+\infty]$, $(S_j)_{j\ge 1}$ une suite d'ouverts de Ω et $(u_j)_{j\ge1}$ une suite de fonctions avec*

– *pour tout j, $u_j \in C(\Omega\setminus S_j) \cap H^1(\Omega\setminus \overline{S_j})$,*
– $\sup_j \|u_j\|_{L^p(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_j(x)|^2\,dx \;<\; +\infty$,
– $\sup_j \mathcal{H}^{N-1}(\partial S_j) \;<\; +\infty$.
– $\lim_{j\to\infty} |S_j| = 0$.

Alors il existe $u \in GSBV(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ telle qu'à une sous-suite près (et en prolongeant chaque u_j dans S_j par zéro) :

$$u_j(x) \to u(x) \text{ p.p. dans } \Omega,$$

$$\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u \text{ faiblement dans } L^2(\Omega,\mathbb{R}^N),$$

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_u) \;\le\; \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \liminf_{j\to\infty} \mathcal{H}^{N-1}(\partial S_j\cap\Omega).$$

Il suffit alors de construire u'_ε simplement en posant $u'_\varepsilon = u_\varepsilon$ dans $\Omega\setminus S_\varepsilon$, et $u'_\varepsilon = 0$ dans S_ε : on vérifie facilement que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \;\gtrsim\; \int_{\Omega\setminus S_\varepsilon} |\nabla u'_\varepsilon|^2\,dx + (\mu/2)\mathcal{H}^1(\partial S_\varepsilon)$. On conclut grâce au lemme.

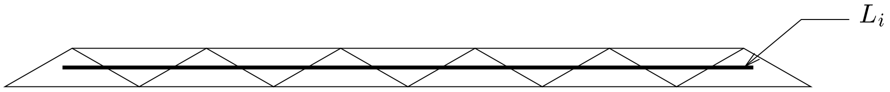

FIG. 9 – Le recouvrement de la discontinuité L_i

On veut maintenant montrer le point *(ii.)*. Etant donnée u, on doit construire une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui tend vers u avec $\limsup_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le F(u)$. Pour ce faire on commence par supposer que u est assez régulière, en particulier, que son ensemble de sauts est l'union finie des segments disjoints $L_1, \dots, L_m$. Pour ε donné (petit) on considère les triangles les "plus petits" qui peuvent exister dans une triangulation de $\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$. Ce sont des triangles isocèles qui ont deux angles égaux à θ_0 et deux côtés de longueur ε (le troisième est donc de longueur $2\varepsilon\cos\theta_0$). On recouvre chaque discontinuité L_i par une union de ces petits triangles comme sur la Figure 9. On a alors facilement que $f_\infty \sum_T |T|/\varepsilon \le \mu\mathcal{H}^1(L_i)$, la somme étant prise sur les triangles T qui recouvrent L_i. On montre ensuite que si θ_0 n'est pas trop grand ($\theta_0 \le 18°$ convient) et si $\omega(\varepsilon) \ge 6\varepsilon$, on peut construire un maillage global $\mathbb{T}_\varepsilon$ dans $\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$ qui contient ces recouvrements de la discontinuité. La fonction u_ε est alors définie de façon classique comme une discrétisation de u sur le maillage $\mathbb{T}_\varepsilon$, et les estimations classiques en éléments finis garantissent que $\int_T |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx$ est contrôlée par $\int_T |\nabla u|^2\,dx$ (et des termes d'ordre supérieur en ε) pour tous les triangles $T \in \mathbb{T}_\varepsilon$ qui n'intersectent pas L_i. Il est facile de déduire alors que $\limsup_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le F(u)$.

Dans le cas général, la fonction u n'est pas aussi élémentaire. On montre cependant qu'une fonction $u \in GSBV(\Omega)$ arbitraire est limite d'une suite $(u^n)_{n\ge 1}$ de fonctions dont l'ensemble des sauts est l'union finie de segments disjoints, avec $\lim_{n\to\infty} F(u^n) = F(u)$ (ceci se déduit d'un résultat de Dibos et Séré [96]). Ensuite, un procédé diagonal classique dans ce genre de démonstration permet de fabriquer la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tendant vers u à partir des suites $(u^n_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ fabriquées pour chaque u^n de la manière que nous venons d'exposer.

3.4.2 Deux variantes [10, 2]

Lorsqu'on est amené à considérer l'implémentation numérique de la fonctionnelle (21), on se rend vite compte que ce n'est pas très simple. En particulier, la démonstration du Théorème 3.6 montre que l'on n'aura $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \simeq F(u)$ (avec en particulier une bonne approximation du terme en $H^1(S_u)$) que si le maillage sur lequel vit u_ε est fait, le long de la discontinuité S_u, de petits triangles isocèles de côtés ε, ε, et $2\varepsilon\cos\theta_0$. Ce type de maillage semble pratiquement impossible à construire en général. Pour cette raison, on n'essaie pas d'implémenter directement (21) mais plutôt la variante suivante, mentionnée aussi dans [10]. Pour tout triangle T on note h_T la plus petite hauteur du triangle T. On pose alors pour tout ε

$$F_\varepsilon(u) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\min_{\mathbb{T}} \sum_{T\in\mathbb{T}} \frac{|T\cap\Omega|}{h_T} f(h_T|\nabla u|^2)\,dx & \text{si } u \in V_\varepsilon(\Omega), \\ +\infty & \text{si } u \in L^p(\Omega)\setminus V_\varepsilon(\Omega), \end{cases} \tag{23}$$

où le minimum est pris sur toutes les triangulations $\mathbb{T}$ adaptées à la fonction u (telles que u est affine sur chaque triangle $T \in \mathbb{T}$, et donc ∇u constant sur T). La même preuve qu'au paragraphe précédent montre que F_ε Γ–converge dans $L^p(\Omega)$ vers $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + f_\infty \mathcal{H}^1(S_u)$ (si $u \in L^p(\Omega) \cap GSBV(\Omega)$, et $+\infty$ sinon). L'écriture de cette nouvelle fonctionnelle peut sembler moins élégante *a priori* que (21). Mais son avantage est que pour avoir une bonne approximation $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \simeq F(u)$, il suffit maintenant que le maillage sur lequel u_ε est défini soit formé, au voisinage de S_u, de triangles alignés le long de la discontinuité, au sens où leur plus grand coté doit être le plus parallèle possible à S_u : ce qui laisse plus de souplesse pour la construction d'un maillage optimal.

Dans [2], nous proposons une implémentation de cette fonctionnelle. Nous proposons aussi la variante suivante, qui nous semble plus stable ("à l'usage", voir les exemples Section 3.4.3). Etant donnée une triangulation $\mathbb{T}$ sur Ω, on définit sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ l'application linéaire $M : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ qui à tout $v = (v_T)_{T\in\mathbb{T}}$ associe $M(v) = (M(v)_T)_{T\in\mathbb{T}}$ défini par

$$M(v)_T \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{T'\in\mathbb{T},T'\cap T\neq\emptyset} |T'\cap\Omega| v_{T'}}{\displaystyle\sum_{T'\in\mathbb{T},T'\cap T\neq\emptyset} |T'\cap\Omega|}.$$

Si le vecteur v est identifié avec la fonction constante par morceaux sur Ω qui vaut v_T sur chaque $T\cap\Omega$, $T \in \mathbb{T}$, on voit que $M(v)_T$ est la moyenne de v sur la réunion de T et de tous les triangles adjacents (qui ont en commun avec T un sommet ou une arête). Si $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ est muni du produit scalaire

$$(u,v) \;=\; \sum_{T\in\mathbb{T}} |T\cap\Omega|\, u_T\cdot v_T,$$

l'adjoint M^* de M est donné par

$$M^*(v)_T \;=\; \sum_{T'\in\mathbb{T},T'\cap T\neq\emptyset} \frac{|T'\cap\Omega|}{S_{T'}}\, v_{T'},$$

où $S_T = \sum_{T'\cap T\neq\emptyset} |T'\cap\Omega|$. On pose alors, lorsque $u \in L^p(\Omega)$,

$$F_\varepsilon(u) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\min_{\mathbb{T}} \sum_{T\in\mathbb{T}} |T\cap\Omega| \frac{1}{h_T} f(h_T M^*(|\nabla u|^2)_T), & \text{si } u \in V_\varepsilon(\Omega),\\ +\infty, & \text{sinon,}\end{cases} \tag{24}$$

où le minimum est pris sur les $\mathbb{T}$ adaptées à u (pour lesquelles, en particulier, $|\nabla u|^2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$), et

$$F(u) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \;+\; 3f_\infty\mathcal{H}^1(S_u), & \text{si } u \in L^p(\Omega)\cap GSBV(\Omega),\\ +\infty, & \text{si } u \in L^p(\Omega)\setminus GSBV(\Omega).\end{cases} \tag{25}$$

La définition (24) est fortement inspirée de [65], où Braides et Dal Maso montrent qu'on peut approximer la fonctionnelle de Mumford et Shah par des fonctionnelles non–locales du type

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega f\left(\varepsilon\frac{1}{|B_\varepsilon(x)\cap\Omega|}\int_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} |\nabla u(y)|^2\,dy\right)\,dx.$$

On montre alors dans [2] que le Théorème 3.6 est valable aussi pour F_ε et F définis par (24-25). La preuve est un peu plus délicate, et fait appel au Lemme 3.8 mentionné plus haut.

Notons que quelle que soit la définition des fonctionnelles F_ε, F ((21-22), (23), ou encore (24-25)), on a le résultat de compacité suivant :

Théorème 3.9 [10, 2] *Soit $p \in [1, +\infty)$. Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifiant $u^\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$ pour tout ε et*

$$\sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(u^\varepsilon) \;+\; \|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \;<\; +\infty\,.$$

Alors il existe $u \in GSBV(\Omega)$ et une sous-suite u^{ε_j} tendant vers u p.p. dans Ω, telles que

$$F(u) \le \liminf_{j\to\infty} F_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j})\,. \tag{26}$$

En particulier, si $g \in L^p(\Omega)$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, u^ε est solution de

$$\min_{v\in L^p(\Omega)} \; F_\varepsilon(v) \;+\; \int_\Omega |v(x) - g(x)|^p\,dx\,, \tag{27}$$

alors la limite u est solution de

$$\min_{v\in L^p(\Omega)} \; F(v) \;+\; \int_\Omega |v(x) - g(x)|^p\,dx\,. \tag{28}$$

Si $p > 1$, la suite u^{ε_j} converge fortement vers u.

3.4.3 L'implémentation [2]

Dans [2], nous nous intéressons essentiellement à l'implémentation numérique des fonctionnelles définies dans la section précédente. Plus précisément, nous montrons comment résoudre numériquement le problème (27) (pour $p = 2$), et donc (si ε est assez petit) obtenir une solution approchée du problème de Mumford et Shah (28), dans les cas où F_ε est définie d'abord par (23) puis par (24).

Dans les deux cas, il y a deux difficultés majeures. La première vient de la non–convexité de f, et donc de l'énergie, pour une triangulation donnée. Il n'y a pas de solution miracle pour traiter ce problème, et l'approche que nous proposons (qui est exposée dans la section 3.3.2 page 19, et sur laquelle nous reviendrons rapidement) semble relativement efficace. La deuxième difficulté provient du maillage. Si on connaît la solution u, on a vu que le maillage optimal devait être fait, au voisinage de S_u, de petits triangles allongés alignés parallèlement à S_u. Le problème est que u est précisément l'inconnue qu'on cherche à calculer. L'idée est donc de procéder de manière itérative. A chaque étape, on estime u, et en fonction de cette estimation on reconstruit un nouveau maillage mieux adapté à la solution. Les étapes sont donc :

- *initialisation* (génération d'un maillage) :
  on fixe ε_0, et on choisit une triangulation arbitraire (par exemple régulière) $\mathbb{T}_{\varepsilon_0} \in \mathcal{T}_{\varepsilon_0}(\Omega)$.
- *itération k* :
  1. minimisation : on trouve u_k en résolvant $\min_{u\in V_{\varepsilon_k}(\Omega)} F_{\varepsilon_k}(u, \mathbb{T}_{\varepsilon_k}) + \beta \int_\Omega |u-g|^2\,dx$
  2. adaptation du maillage : on reconstruit un maillage $\mathbb{T}_{\varepsilon_{k+1}}$, en fonction de u_k et du choix d'un nouveau paramètre ε_{k+1} (qui peut être égal à ε_k).

Ici on a noté de façon évidente $F_\varepsilon(u,\mathbb{T}) = \sum_{T\in\mathbb{T}} \frac{|T\cap\Omega|}{h_T} f(h_T|\nabla u|^2)$ pour un maillage $\mathbb{T}\in\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$ fixé et $u\in V_\varepsilon(\Omega)$ définie sur le maillage $\mathbb{T}$ (si u n'est pas définie sur $\mathbb{T}$ on pose $F_\varepsilon(u,\mathbb{T})=+\infty$). $\beta>0$ est un paramètre fixé.

L'étape 1. L'étape 1. se traite comme dans la section 3.3.2 : on choisit f concave, on écrit $f(t)=\min_{v\in[0,1]} tv+\psi(v)$ où ψ est convexe. On introduit une fonction $v:\Omega\to[0,1]$, constante sur chaque triangle T de la triangulation $\mathbb{T}_\varepsilon$ (on n'écrit pas l'indice k), et on remplace $F_\varepsilon(u,\mathbb{T}_\varepsilon)$ par

$$\sum_{T\in\mathbb{T}_\varepsilon} |T\cap\Omega| \left(v_T|\nabla u|^2 \,+\, \frac{\psi(v_T)}{h_T}\right).$$

L'algorithme consiste alors à minimiser alternativement par rapport à u et v. L'étape en u consiste à chercher le minimum de

$$\int_\Omega v(x)|\nabla u(x)|^2 \,+\, \beta|u(x)-g(x)|^2\,dx$$

parmi toutes les fonctions u pour lesquelles la triangulation $\mathbb{T}_\varepsilon$ est adaptée. Ceci est un problème linéaire relativement facile à résoudre. L'étape en v consiste simplement à poser

$$v_T = f'\left(h_T|\nabla u|^2\right)$$

sur chaque triangle $T\in\mathbb{T}_\varepsilon$.

L'étape 2. Pour la deuxième étape, on utilise le générateur de maillage bl2d développé par l'INRIA [59, 60]. L'intérêt énorme de ce programme est qu'on peut lui préciser localement une métrique (ce qui correspond à donner une matrice 2×2 symétrique en chaque point), et qu'il va essayer de fabriquer la triangulation en orientant les triangles par rapport à cette métrique, et en plaçant des triangles plus ou moins grands en fonction de la magnitude des valeurs propres de la métrique. Cette métrique est calculée en fonction de l'ancien maillage T_{ε_k}, et des fonctions u_{ε_k} et v_{ε_k} obtenues à l'étape précedente. Les détails sont évidemment un peu plus complexes, nous renvoyons à l'article pour plus de précision.

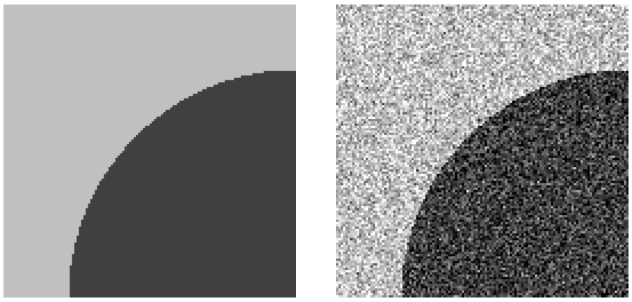

FIG. 10 – Une image élémentaire et sa version bruitée

Exemple La Figure 11 montre le résultat de la minimisation de la fonctionnelle de (27) pour $p=2$, avec F_ε définie par (21), et pour un choix de paramètres approprié. La fonction g est

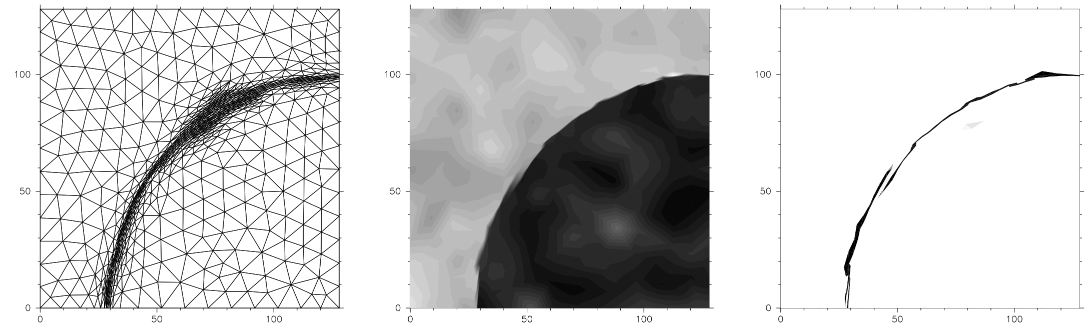

FIG. 11 – A gauche, le maillage raffiné (après 4 itérations) ; au milieu, l'image reconstruite, à droite, le champ v

l'image de droite de la Figure 10. Le maillage initial est homogène. On voit que le maillage final est très fin le long de la discontinuité, et grossier ailleurs. On voit aussi que le résultat n'est pas si bon, sur cette image qui est très bruitée, le long de la discontinuité. En fait, la méthode est un peu trop "locale" : le fait de fixer v_T simplement en fonction de l'état du triangle T rend le résultat très sensible au bruit. C'est pour cette raison que nous avons introduit la variante régularisée (24). Un intérêt est que l'algorithme est pratiquement identique. En effet, on introduit à nouveau une variable v_T et on remplace cette fois F_ε par

$$\sum_{T\in\mathbb{T}_\varepsilon} |T\cap\Omega| \left(v_T M^*(|\nabla u|^2)_T \,+\, \frac{\psi(v_T)}{h_T} \right).$$

On s'aperçoit que cette expression s'écrit aussi

$$\sum_{T\in\mathbb{T}_\varepsilon} |T\cap\Omega| \left(M(v)_T |\nabla u|^2 \,+\, \frac{\psi(v_T)}{h_T} \right).$$

Si on pose $w = M(v)$, on voit qu'on est amené à résoudre alternativement

$$\min_u \int_\Omega w(x)|\nabla u(x)|^2 \,+\, \beta|u(x)-g(x)|^2\,dx$$

où u doit être défini sur la triangulation $\mathbb{T}_\varepsilon$, et

$$w_T = M(v)_T = M\left(f'\left(hM^*(|\nabla u|^2)\right)\right)_T.$$

La Figure 12 montre la même expérience effectuée avec la nouvelle fonctionnelle. Le résultat est beaucoup plus net le long de la discontinuité.

3.4.4 Quelques remarques

Il n'est pas clair en pratique qu'une approche par éléments finis soit tellement adaptée à la résolution de la plupart des problèmes de traitement d'images pour lesquels la fonctionnelle de Mumford et Shah a été inventée. Il n'est pas non plus clair qu'il soit important d'obtenir une approximation parfaitement isotrope du terme de longueur pour obtenir de bonnes segmentations d'images (*cf.* Fig. 8, où la deuxième énergie produit déjà un très bon résultat). Par contre, nous allons montrer dans la section 5 en quoi la fonctionnelle de Mumford et Shah peut avoir un

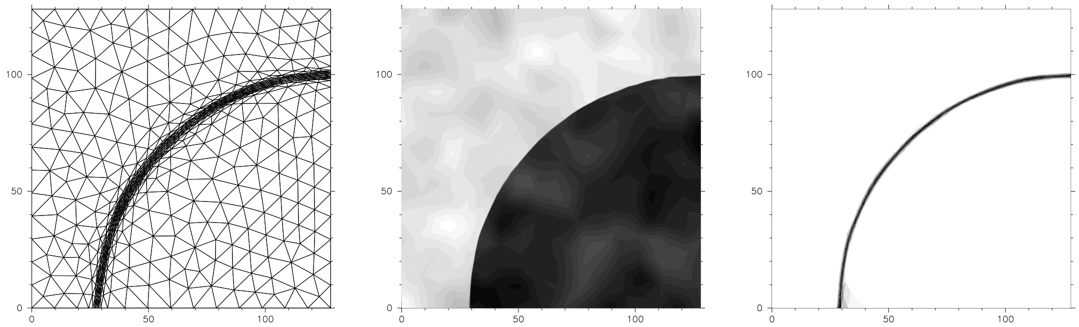

FIG. 12 – Même disposition que sur la Figure 11, mais avec la variante (24)

intérêt en mécanique de la rupture, pour calculer des états d'équilibre de matériaux fracturés et des évolutions de fractures. Dans ce cas, non seulement l'approximation par élément finis est assez naturelle, mais, de plus, il est très important d'avoir une bonne approximation du terme de longueur (bien sûr, lorsque le matériau qu'on considère est isotrope), si on veut espérer calculer le mieux possible le chemin suivi par la fracture. Voir Figure 19. Il faut noter que dans les applications en mécanique, on devrait en toute rigueur remplacer le terme $\int |\nabla u|^2$ par une densité d'énergie élastique : notamment, dans le cadre de l'élasticité linéarisée, par un terme quadratique dépendant du gradient symétrisé du déplacement. Malheureusement, on ne sait alors plus démontrer les résultats de Γ−convergence établis dans cette section. Une des raisons est l'absence de principe de comparaison. Une autre est le fait qu'on ne sait pas dans ce cadre si un déplacement arbitraire peut être approximé (comme dans la preuve du point *(ii.)* page 22) par des déplacements dont l'ensemble des discontinuités est plus régulier (et en particulier fermé, ce qui dans le cas scalaire découle de l'équivalence entre les formulations faible et forte du problème de Mumford et Shah).

En ce qui concerne les approximations par différences finies, une autre difficulté vient du fait que pour modéliser des matériaux ayant un module de cisaillement non nul, on ne peut pas se contenter d'approximations basées simplement sur des différences à deux points, comme (19)— on ne peut pas non plus, par conséquent, reproduire la preuve du Théorème 3.4. Une approche par différences finies est proposée par R. Alicandro, M. Focardi et M. S. Gelli [34] (avec une approximation anisotrope de la longueur du saut).

4 Optimisation et calcul de formes

Dans cette partie, nous allons décrire quelques problèmes théoriques et quelques approches numériques pour l'optimisation de formes. Pour une introduction aux techniques d'optimisation de forme ou d'optimisation "topologique" nous renvoyons à [137, 53]. Il se trouve que c'est l'étude de la fonctionnelle de Mumford et Shah (un problème à "discontinuité libre") qui nous a amené naturellement à nous intéresser à l'optimisation de forme (où la recherche de domaines inconnus conduit soit à des problèmes d'homogénéisation, soit à des problèmes aux frontières libres). Pour étudier les "mouvements minimisants" de la fonctionnelle [13], nous avons eu besoin d'un lemme (*cf.* Lemme 5.3) qui peut s'exprimer comme un résultat de continuité par rapport au domaine de la solution d'un problème elliptique, et nous allons voir que ce type de continuité est à la base des preuves d'existence de formes optimales. Les méthodes numériques que nous avons étudiées avec Blaise Bourdin nous ont conduit naturellement à l'implémentation de méthodes de calcul de formes. Les problèmes d'isotropie étudiés dans la section 3.3.2 apparaissent naturellement lorsque certains types de discrétisations (sur des carrés) sont utilisées en calcul de formes, et lorsque pour éviter des phénomènes de type "checkerboard" on pénalise une variante (souvent anisotrope) du périmètre de la forme inconnue (voir par exemple [141, 143] pour un exposé des problèmes).

4.1 La continuité par rapport au domaine

4.1.1 Un premier résultat [12]

Très souvent dans des problèmes d'optimisation de forme, l'inconnue est un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dans lequel on résout une certaine équation (elliptique), et le critère $J(\Omega)$ qu'on optimise est exprimé en fonction de la solution u_Ω de cette équation. Il est donc important de comprendre comment se comporte cette fonction u_Ω lorsque Ω varie. Il existe de nombreux articles traitant du problème de la continuité des solutions de problèmes de Neumann ou de Dirichlet, dans des domaines qui bougent. En général, on va supposer que les domaines Ω restent dans une classe (fermée et si possible compacte) définie par des contraintes de régularité, ou de type capacitaire, sur $\partial\Omega$. Dans [80], par exemple, D. Chenais étudie la continuité des solutions de problèmes de Neumann dans des ouverts dont les frontières vérifient (pour simplifier) une propriété de Lipschitz uniforme. Voir aussi [73, 72, 121, 68, 126, 66]. Dans la section 4.1.2, nous détaillons un exemple d'application de ce type de résultat.

En dimension deux la situation est en général beaucoup plus simple. En fait, certaines contraintes s'expriment simplement sous forme de restrictions topologiques. Dans [152], V. Šverák montre que si des domaines (uniformément bornés) $\Omega_j \subset B \subset\subset \mathbb{R}^2$ tendent vers un domaine limite Ω au sens où la distance de Hausdorff $d_{\mathcal{H}}(\Omega_j^c, \Omega^c)$ des complémentaires tend vers zéro, et si le nombre de composantes connexes de Ω_j^c reste uniformément borné, alors les solutions de problèmes de Dirichlet homogènes du type $\Delta u_j = f$ dans Ω_j convergent fortement dans $H_0^1(B)$ vers la solution u du même problème, posé dans Ω. (B est une grosse boule qui contient tous les domaines.) Ceci est équivalent aux propriétés suivantes :

(i) Pour toute suite $(u_j)_{j\geq 1}$ avec $u_j \in H_0^1(\Omega_j)$, si $(u_j, \nabla u_j)$ converge faiblement vers (u, p) dans $L^2(B; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, alors $u \in H_0^1(\Omega)$ et $p = \nabla u$.

(ii) Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe $(u_j)_{j\geq 1}$, $u_j \in H_0^1(\Omega_j)$, telle que la suite $(u_j, \nabla u_j)$ converge fortement vers $(u, \nabla u)$ dans $L^2(B; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ quand $j \to \infty$.

On dit alors que les espaces $H_0^1(\Omega_j)$ convergent "au sens de Mosco" vers l'espace $H_0^1(\Omega)$. Ici lorsqu'on parle d'une suite $(u_j, \nabla u_j)$ comme d'une suite de $L^2(B; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ les fonctions sont implicitement prolongée par zéro en dehors de leur domaine de définition Ω_j. Cette convention est naturelle lorsque $u_j \in H_0^1(\Omega)$, mais nous l'adopterons également dans le cas où les u_j sont dans $H^1(\Omega_j)$, que nous considérerons par la suite : dans ce cas, ∇u_j, qui est l'extension à B (par la valeur zéro) du gradient de u_j dans Ω_j, n'est plus le gradient (au sens des distributions) de u_j étendue à B. Ici, la difficulté du résultat de Šverák réside dans la preuve du point (i). En revanche, (ii) ne pose aucune difficulté : en effet, il suffit de savoir approcher des fonctions $u \in C_c^\infty(\Omega)$ (qui par définition sont denses dans $H_0^1(\Omega)$). Or, pour j assez grand, un tel u est aussi dans $C_c^\infty(\Omega_j)$.

Dans le cas du problème de Neumann, le résultat de [72] était basé sur l'hypothèse que la partie variable du bord du domaine restait confinée à une hypersurface préalablement fixée. Dans [12], écrit en collaboration avec F. Doveri, nous apportons une réponse plus générale, et plus proche de la réponse de Šverák. On considère $v \in L^2(B)$ et les solutions $u_j \in H^1(\Omega_j)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_j + \lambda u_j = v & \text{dans } \Omega_j \\ \nabla u_j \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_j \end{cases}$$

où ν est la normale à Ω_j et $\lambda > 0$ un paramètre fixé. La condition de Neumann s'entend bien sûr au sens faible : le problème est écrit sous la forme

$$\int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla\phi + \lambda u_j \phi \, dx = \int_\Omega v\phi \quad \forall \, \phi \in H^1(\Omega).$$

On définit aussi $u \in H^1(\Omega)$ la solution du même problème dans l'ouvert limite Ω. Dans ce cadre, on a alors le résultat suivant.

Théorème 4.1 [12] *Supposons que les frontières $\partial\Omega_j$ soient connexes (ou aient un nombre uniformément borné de composantes connexes) et vérifient $\sup_j \mathcal{H}^1(\partial\Omega_j) < +\infty$. Alors $u_j \to u$ fortement dans $L^2(B)$, et $\nabla u_j \to \nabla u$ fortement dans $L^2(B;\mathbb{R}^2)$.*

On vérifie que cette propriété est équivalente à (i) et (ii) avec H^1 à la place de H_0^1. Dans ce cas, à l'inverse du résultat de Šverák, c'est le point (ii) qui est difficile à démontrer, tandis que (i) ne présente pas de difficulté notable.

La démonstration de ce résultat est un peu complexe (par rapport à l'amélioration de Bucur et Varchon [69] dont nous parlerons plus loin). L'idée est de traiter séparément chaque composante connexe C de Ω. Si on choisit un point $x_0 \in C$, alors on peut considérer la suite $(C_j)_j$ où pour j assez grand C_j est la composante connexe de Ω_j qui contient x_0. On définit alors la transformation conforme g_j qui envoie le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ sur C_j, avec $g_j(0) = x_0$ et $g_j'(0) \in \mathbb{R}_+$. D'après [144, Thm. 1.8], g_j converge vers g, transformation conforme de $\mathbb{D}$ sur C, localement uniformément dans $\mathbb{D}$ (et donc g_j' vers g'). En particulier, le Jacobien $J_j = |g_j'|^2$ de la transformation va converger localement uniformément vers $J = |g'|^2$. On ramène les problèmes dans $H^1(C_j)$ et $H^1(C)$ à une suite de problèmes posés dans $H^1(\mathbb{D})$, au moyen de ces transformations conformes. On montre qu'on peut ramener l'étude de la convergence de u_j vers u à l'étude de la manière dont les Jacobiens convergent. A priori, $\int_\mathbb{D} J_j = |C_j|$ ne converge pas forcément vers $\int_\mathbb{D} J = |C|$. En effet, la composante C_j peut à la limite se séparer en plusieurs morceaux et donner naissance à d'autres composantes connexes de Ω (dans ce cas, on aura $|C| < \lim_j |C_j|$). On est ramené à étudier le défaut de convergence de J_j au bord $\partial\mathbb{D}$ du disque. (A l'intérieur, on a forcément $\int_A J_j \to \int_A J$ pour tout $A \subset\subset \mathbb{D}$.) On montre que J_j s'accumule en une mesure purement atomique au bord du disque (chaque atome $a\delta_z$ correspond en fait à l'aire $a > 0$ d'une partie de $(\lim_j C_j) \setminus C$ qui s'est séparée de C *grosso modo* au point $g(z)$). Ceci permet de conclure, car le support de cette mesure limite étant de 2–capacité[4] zéro, on vérifie qu'elle n'influe pas sur le problème limite qui est posé dans $H^1(\mathbb{D})$.

Dans cette preuve, on utilise l'hypothèse $\sup_j \mathcal{H}^1(\partial\Omega_j) < +\infty$ qui entraîne que la suite des fonctions $(g_j|_{\partial\mathbb{D}})_j$ est uniformément bornée dans $BV(\partial\mathbb{D})$. L'origine de cette hypothèse vient du fait que nous avions en tête d'appliquer ce théorème à l'étude des "mouvements minimisants" de la fonctionnelle de Mumford et Shah (*cf.* Lemme 5.3 page 48). Dans ce cas, la partie variable de $\partial\Omega_j$ est une fracture K_j de longueur finie et on a facilement l'estimation $\sup_j \mathcal{H}^1(K_j) < +\infty$. Il se trouve aussi qu'intuitivement, nous avions dans l'idée qu'une régularité minimale des frontières devait être nécessaire pour que le résultat soit vrai. Or il n'en est rien.

Dans [69] (Voir aussi [71, 70]) D. Bucur et N. Varchon montrent qu'on peut remplacer la condition $\sup_j \mathcal{H}^1(\partial\Omega_j) < +\infty$ par la condition $\lim_j |\Omega_j| = |\Omega|$ (que la première implique banalement). Lorsque Ω a une seule composante connexe, la preuve est identique à celle du Théorème 4.1 esquissée ci-dessus, mais cette fois on est dans la situation où les Jacobiens J_j tendent vers J (dans L^1, fortement) et il n'y a pas d'accumulation sur $\partial\mathbb{D}$ (il n'est donc pas nécessaire d'étudier plus finement le comportement des g_j au voisinage de la frontière). Dans ce cas, donc, la conclusion du Théorème 4.1 vaut, ainsi que les propriétés (i) et (ii) (avec H^1 au lieu de H^1_0). Lorsque Ω a plusieurs composantes connexes, Bucur et Varchon montrent qu'on peut traiter séparément chaque composante connexe de Ω et se ramener au cas précédent.

Plus précisément, étant donnée une composante connexe C de Ω, ils montrent qu'il existe $\Omega'_j = A_j \cup C_j$ tel que C_j est une composante connexe de Ω'_j, C_j converge vers C ($d_{\mathcal{H}}(C_j^c, C^c) \to 0$ quand $j \to \infty$), $|C_j| \to |C|$ et la 2–capacité de $\Omega_j \setminus \Omega'_j$ converge vers 0. Cette dernière propriété entraîne que l'espace $H^1(\Omega'_j)$ est presque identique, quand $j \to \infty$, à l'espace $H^1(\Omega_j)$. On sait (d'après ce qui précède, puisque C_j, C sont connexes et $|C_j| \to |C|$) que tout $\phi \in H^1(C)$ est limite (avec convergence forte des gradients) de $\phi'_j \in H^1(C_j)$. On pose $\phi'_j \equiv 0$ dans A_j, alors $\phi'_j \in H^1(\Omega'_j)$. Enfin, comme $H^1(\Omega'_j)$ est "proche" de $H^1(\Omega_j)$ on construit facilement une suite $\phi_j \in H^1(\Omega_j)$ avec $\phi_j \simeq \phi'_j$.

Remarque 4.2 Une conséquence du résultat de Bucur et Varchon est l'énoncé suivant, qui est vrai indépendemment de toute hypothèse supplémentaire de régularité sur le bord des domaines.

Corollaire 4.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\Omega = \overset{\circ}{\overline{\Omega}}$ et $\overline{\Omega}^c$ a un nombre (localement) fini de composantes connexes. Alors $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Ici, $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne la restriction à Ω des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. En appliquant le Théorème 4.1,

[4] C'est-à-dire la capacité H^1, définie par exemple par 2–cap$(A) = \inf\{\|\phi\|_{H^1} : \phi \in C^0_c(\mathbb{R}^2), \phi > \chi_A\}$. Voir par exemple [30].

on démontrerait le même résultat seulement sous l'hypothèse supplémentaire que le périmètre de Ω est (localement) fini. Notons qu'on peut supposer Ω borné, il est très facile d'étendre ensuite le résultat au cas non borné.

Démonstration. On pose pour tout $j \geq 1$, $\Omega_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \mathrm{dist}\,(x,\Omega) < 1/j\}$. Alors la limite de Hausdorff des Ω_j^c est $\overline{\bigcup_j \{\mathrm{dist}\,(x,\Omega) \geq 1/j\}}$, soit $\overline{(\overline{\Omega})^c}$, qui par hypothèse est Ω^c. Les Ω_j tendent donc vers Ω. Soit $\phi \in H^1(\Omega)$, d'après ce qui précède $(\phi, \nabla\phi)$ est limite (forte dans $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$) de $(\phi_j, \nabla\phi_j)$ où $\phi_j \in H^1(\Omega_j)$. Comme $\Omega \subset\subset \Omega_j$, on peut supposer que $\phi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et clairement $\phi_j \to \phi$ dans $H^1(\Omega)$. □

On pourrait montrer le Corollaire 4.3 plus simplement de façon directe, en adaptant les méthodes de [9] et sans faire appel à des théorèmes de continuité comme le Théorème 4.1.

Remarque 4.4 On pourrait se demander ce qui se passe lorsqu'on considère les espaces de type $W^{1,p}$ ou $W_0^{1,p}$, avec $p \neq 2$. On se rend alors compte que l'exposant $p = 2$ est critique (vraisemblablement, $p = N$ où N est la dimension de l'espace). En effet :

• Si $p > 2$, et $\Omega_j \subset B$ pour tout j, on sait que $W_0^{1,p}(\Omega_j) \subset C_0^0(B)$ (avec injection compacte). Supposons $\Omega_j \to \Omega$ au sens où la limite de la distance $d_{\mathcal{H}}(\Omega_j^c, \Omega^c)$ tend vers zéro, sans autres hypothèses sur les ouverts Ω_j. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pour $\varepsilon > 0$ il existe u' à support compact dans Ω telle que $\|u - u'\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$, et si j est assez grand, $u' \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$. Réciproquement, si $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$ pour tout j et la norme $\|u_j\|_{W^{1,p}}$ reste bornée, alors à une suite extraite près $u_j \to u$ uniformément dans B, d'où l'on déduit facilement que $u \equiv 0$ sur Ω^c et donc $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ [30, Thm. 9.1.3]. On a donc la convergence de Mosco des $W_0^{1,p}(\Omega_j)$ vers $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $p < 2$ il est facile de fabriquer des contre exemples.

• Si $1 < p < 2$ et si on considère les espaces $W^{1,p}(\Omega_j)$ et $W^{1,p}(\Omega)$, la question est un peu plus délicate. Si $|\Omega_j| \to |\Omega|$ et Ω_j^c a un nombre uniformément borné de composantes connexes, on remarque que lorsque u est dans $H^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$, il existe (d'après [69]) $u_j \in H^1(\Omega_j) \subset W^{1,p}(\Omega_j)$ avec $u_j \to u$ et $\nabla u_j \to \nabla u$ dans $L^2(B)$, et donc aussi dans $L^p(B)$. Pour conclure dans le cas général (si $u \notin H^1(\Omega)$), il faut alors montrer que $\{u \in W^{1,p}(\Omega) \ : \ \|u\|_{H^1} < +\infty\}$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$. Cette propriété n'est sans doute pas vraie en général, mais en dimension 2, lorsque Ω^c a un nombre borné de composantes connexes, on peut la démontrer en adaptant les techniques de dualité de [70] ou [9]. Par ailleurs, si $u_j \in W^{1,p}(\Omega_j)$ et $\sup_j \|u_j\|_{L^p} + \|\nabla u_j\|_{L^p} < +\infty$, à une sous suite près u_j converge faiblement dans $L^p(B)$ vers une fonction u (nulle en dehors de Ω), et on vérifie aisément que $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$. A nouveau, dans le cas $p > 2$, on peut fabriquer des contre exemples. Les articles récents de Dal Maso, Ebobisse et Ponsiglione [85] et [99] traitent de ces cas, le premier en général et le second plus spécifiquement en vue des applications à la croissance des fractures.

4.1.2 Un exemple en élasticité linéarisée [9]

Nous allons montrer un exemple de problème où des résultats de continuité du type décrit dans la partie précédente sont utiles. Supposons qu'on veuille construire une "console" optimale, c'est-à-dire une structure, contenue dans une région donnée de $\mathbb{R}^2$, qui est attachée d'un côté et qui résiste le mieux possible lorsqu'une force est exercée sur une autre partie de son bord. On introduit une grosse boîte $B = (a, b) \times (c, d)$, une zone de Dirichlet $D = (a-1, a) \times (c, d)$ à laquelle la structure est attachée et où on fixera donc les déplacements à zéro, et un petit rectangle $N = (b - \delta, b) \times (c', d')$ ($\delta > 0$ est un petit paramètre fixé) sur le bord duquel la traction (ou la poussée) va s'exercer. (Plus exactement sur la partie du bord $\Gamma = \{b\} \times (c', d')$.) Il s'agit bien sûr d'un exemple de géométrie possible, ce qui suit est beaucoup plus général et peut s'appliquer aux cas où D, N sont des ensembles bornés à frontière Lipschitz, et Γ est union finie d'ouverts de ∂N.

L'inconnue est un ouvert Ω avec $D \cup N \subset \Omega \subseteq B$. Un déplacement admissible pour Ω est

– dans le cas scalaire, une fonction $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que $\nabla u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, avec $u \equiv 0$ dans D ;
– dans le cas de l'élasticité linéarisée (cas vectoriel), un champ de vecteurs $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tel que : (i) $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, (ii) le gradient symétrisé $e(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2 \in L^2(\Omega; \mathcal{S}^{2\times 2})$ où $\mathcal{S}^{2\times 2}$ est l'espace vectoriel tridimensionnel des matrices symétriques 2×2. Et, bien sûr, $u \equiv 0$ dans D.

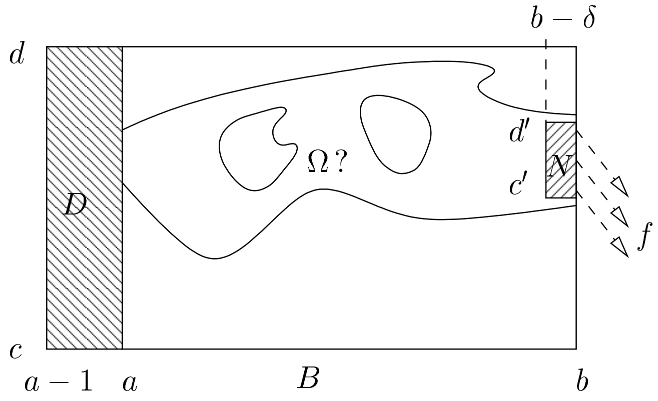

FIG. 13 – La Console

Sur Γ, on va supposer qu'on exerce une force constante f (scalaire ou vectorielle). On pourrait en fait considérer n'importe quel f dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $\int_\Gamma f \neq 0$.

L'énergie élastique associée à une forme Ω et à un déplacement u admissible est donnée par

$$J(\Omega, u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{A} e(u) : e(u) - \int_\Gamma f \cdot u,$$

où $\mathbf{A}$ est la loi de Hooke du matériau linéaire–élastique ($\mathbf{A}\varepsilon : \varepsilon$ est une forme quadratique définie positive de la matrice symétrique $\varepsilon \in \mathcal{S}^{2\times 2}$). Dans le cas scalaire, $J(\Omega, u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Gamma f \cdot u$. Le problème d'équilibre pour Ω est

$$\min \{ J(\Omega, u) \ : \ u \text{ admissible pour } \Omega \} . \tag{29}$$

S'il y a une solution $\bar{u}$, on définit la compliance $C(\Omega)$ de l'ouvert Ω comme étant le travail des forces f sur le déplacement $\bar{u}$, soit $C(\Omega) = \int_\Gamma f \cdot \bar{u}$, et il est facile de vérifier que $C(\Omega) =$

$-2J(\Omega, \bar{u})$. On peut donc toujours définir C (finie ou infinie) par

$$C(\Omega) \;=\; -2\inf\{J(\Omega, u)\;:\; u \text{ admissible pour } \Omega\}\;,$$

qui est une fonction décroissante de Ω. On montre que $C(\Omega) < +\infty$ est équivalent à l'existence d'un $\bar{u}$ qui minimise $J(\Omega, \cdot)$, ainsi qu'au fait que Ω "connecte" D et N (D et N sont dans la même composante connexe de Ω, ce qui garantit que la force agissant sur Γ ne peut entraîner N à l'infini).

On va essayer de trouver la console dont la compliance est la plus faible, à volume donné. D'un point de vue mécanique, c'est l'objet qui va stocker le moins d'énergie interne à l'équilibre, et donc va résister le mieux au chargement f. En général, si on cherche juste à minimiser $C(\Omega)$ sous la contrainte $|\Omega| \le V$, V donné, le problème n'a pas de solution, et les suites minimisantes tendent à s'homogénéiser pour former à la limite une mixture fine de solide et de vide (voir par exemple [81]). Dans [9], on montre le théorème suivant :

Théorème 4.5 [9] *Pour tout entier $N \ge 1$ et tout V, $|D| + |N| < |V| \le |B|$, le problème*

$$\min\left\{\, C(\Omega)\;:\; D\cup N \subset \Omega \subseteq B\,,\;\; |\Omega| \le V\,,\;\; \sharp cc(\Omega^c) \le N \,\right\}$$

a une solution.

Ici, $\sharp cc(\Omega^c)$ désigne le nombre de composantes connexes du complémentaire de Ω.

Pour démontrer ce résultat, on considère une suite minimisante $(\Omega_j)_{j\ge 1}$. On extrait une sous suite convergeant (au sens de la convergence de Hausdorff des complémentaires) vers un domaine Ω, qui va vérifier toutes les hypothèses du théorème. Il faut montrer que $C(\Omega_j) \to C(\Omega)$.

Comme $C(\Omega_j) < +\infty$ pour tout j, il existe un déplacement u_j qui minimise l'énergie $J(\Omega_j, \cdot)$. En utilisant des résultats de Bucur et Varchon [69], on arrive à montrer que l'ensemble limite Ω, également, doit connecter N à D, d'où l'existence d'un $\bar{u}$ minimisant $J(\Omega, \cdot)$. Comme $C(\Omega_j) = \int_\Gamma f \cdot u_j$, on voit qu'il suffit de montrer que $u_j \to \bar{u}$ (par exemple, faiblement dans $H^1(N)$) pour avoir continuité de la compliance.

On montre que la suite $(u_j)_j$ est compacte dans $L^2(B;\mathbb{R}^2)$, tandis que la suite $(e(u_j))_j$ est compacte dans $L^2(B;\mathcal{S}^{2\times 2})$ (dans le cas scalaire, u_j et ∇u_j, dans $L^2(B)$). A une sous-suite près, on a donc $u_j \rightharpoonup u$, $e(u_j) \rightharpoonup \varepsilon$, et on vérifie facilement qu'à l'intérieur de Ω, $\varepsilon = e(u)$. Il suffit donc de montrer que $u = \bar{u}$ dans Ω, c'est-à-dire que u est l'unique solution de l'équation

$$\int_\Omega \mathbf{A}e(u) : e(v) \;=\; \int_\Gamma f \cdot v \tag{30}$$

pour tout $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ avec $e(v) \in L^2(\Omega;\mathcal{S}^{2\times 2})$ et $v \equiv 0$ dans D.

C'est là que les résultats du type du Théorème 4.1 interviennent. On utilise un résultat plus fort de Bucur et Varchon [70, Thms 3.1, 4.1] qui montre que si $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$, il existe $v_j \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ avec $\nabla v_j \to \nabla v$ dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^4)$, tandis que $\nabla v_j \to 0$ dans $L^2(B\setminus\Omega;\mathbb{R}^4)$ (fortement). On peut modifier légèrement v_j pour avoir toujours $v_j \equiv 0$ dans D. Alors, pour tout j,

$$\int_{\Omega_j} \mathbf{A}e(u) : e(v_j) \;=\; \int_\Gamma f \cdot v_j\,.$$

A la limite on obtient

$$\int_\Omega \mathbf{A}\varepsilon : e(v) \;=\; \int_\Gamma f \cdot v\,.$$

mais comme $\varepsilon = e(u)$ dans Ω, on retrouve (30). Dans le cas scalaire, le théorème est démontré. (Notons qu'une preuve assez proche est donnée par Bucur, Buttazzo, et Varchon pour un problème scalaire légèrement différent [67].) Dans le cas vectoriel, on vient de vérifier (30) pour tout v dans H^1, mais cela est insuffisant pour conclure. On conclut en utilisant le résultat suivant, aussi démontré dans [9] :

Théorème 4.6 [9] *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ a un nombre fini de composantes connexes. Soit $v \in L^2_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tel que $e(v) \in L^2(\Omega;\mathcal{S}^{2\times 2})$. Alors il existe une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $v_n \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ pour tout n et $e(v_n) \to e(u)$ dans $L^2(\Omega;\mathcal{S}^{2\times 2})$ (fortement).*

Si v n'est pas dans H^1, on commence par l'approximer par des v_n comme dans le théorème. On a montré (30) pour chacun des v_n, il suffit de passer à la limite pour obtenir (30) pour v. $\square$

La preuve du Théorème 4.6 se fait par une méthode de dualité inspirée de [70], nous renvoyons à l'article pour les détails.

4.2 Un résultat de régularité [14]

Ici nous décrivons un résultat obtenu en collaboration avec C. J. Larsen. Considérons le problème de la console optimale, décrit dans la section précédente. Supposons qu'au lieu de limiter le nombre de composantes connexes du complémentaire de Ω on se propose (comme il est relativement classique en optimisation de forme, voir la présentation de [3] dans la section 4.3.1) de pénaliser le périmètre de l'ensemble (toujours dans l'idée d'interdire l'homogénéisation). Pour des raisons techniques, on va également pénaliser le volume $|\Omega|$ plutôt que de le contraindre. On est donc amené à étudier le problème suivant :

$$\min\left\{C(\Omega) \;+\; \lambda|\Omega| \;+\; \mu\mathcal{H}^1(\partial\Omega) \;:\; \Omega \supset D\cup N\right\} \tag{31}$$

où λ,μ sont des paramètres positifs (la "boîte" B n'est plus nécessaire dans ce cas). On peut montrer à nouveau l'existence d'une solution pour ce problème, par à peu près les mêmes méthodes que précédemment. En particulier, C étant décroissante, on montre que si un petit "trou" A dans Ω (une composante connexe de $\overline{\Omega}^c$) a un volume $|A| \leq 4\pi(\mu/\lambda)^2$, alors le fait de le boucher (remplacer Ω par $\Omega\cup\overline{A}$) améliore à la fois la compliance $C(\Omega)$ et la pénalisation $\lambda|\Omega| + \mu\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ (du fait de l'inégalité isopérimétrique). Par conséquent, les "trous" ne peuvent pas être trop petits, et on obtient aisément une borne sur le nombre de composantes connexes de Ω^c, ce qui permet de transposer facilement les techniques de la section précédente au nouveau problème.

On obtient alors le résultat suivant, valable dans le cas scalaire uniquement, pour Ω solution du problème.

Théorème 4.7 [14] *L'ensemble $\partial\Omega \setminus \overline{D\cup N}$ est de classe C^∞.*

Pour montrer ce résultat, on commence par montrer que le Ω optimal doit vérifier une condition de sphère extérieure, de rayon uniforme. Ceci est vrai dans les cas scalaire comme vectoriel, étant une conséquence de la monotonie de la compliance C. Un minimiseur de $\lambda|\Omega| + \mu\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ est nécessairement un arc de cercle de courbure λ/μ (en dimension plus grande, une hypersurface de courbure moyenne λ/μ). Par conséquent, il est naturel de s'attendre à ce qu'un minimiseur de $\lambda|\Omega| + \mu\mathcal{H}^1(\partial\Omega) +$ (un critère décroissant) vérifie $\kappa \leq \lambda/\mu$, où κ est la courbure de $\partial\Omega$, positive lorsque Ω est concave et négative sinon. (En particulier, cette borne interdit les singularités rentrantes.) En pratique, on montre (à des détails techniques près) qu'en chaque point x du bord, il existe une boule $B(y,\rho)$ telle que $B(y,\rho)\cap\Omega = \emptyset$ et $x \in \partial B(y,\rho)$. Ici ρ est de l'ordre de $c\,\mu/\lambda$.

Ceci permet de définir une normale généralisée (comme l'ensemble des directions ν telles que $B(x+\rho\nu,\rho)$ est dans Ω^c), qui est continue, et on en déduit qu'en chaque point de la frontière, ou bien Ω est un sous-graphe Lipschitzien, ou bien il s'aplatit en un point de rebroussement de la frontière, ou encore est coincé entre deux graphes tangents au point considéré. Ces deux dernières possibilité ne peuvent avoir lieu qu'un nombre fini de fois.

Dans le cas scalaire, on déduit de la condition de sphère extérieure une estimation de $|\nabla u|$ au voisinage de chaque point de la frontière. Au moyen de petites variations de la frontière "à la Murat–Simon" [137], on montre que $\partial\Omega$ satisfait l'équation d'Euler (écrite ici de façon formelle)

$$\mu\kappa \;=\; \lambda \;-\; |\nabla u|^2. \tag{32}$$

Ceci permet de conclure. On montre d'abord que les situations exceptionnelles (de type point de rebroussement ou plat) ne peuvent arriver, parce qu'elles correspondent *grosso modo* à des points où la courbure vaut $-\infty$, tandis que $|\nabla u|$ est bornée. Lorsque Ω est un sous-graphe Lipschitz, l'équation d'Euler entraîne qu'en réalité $\partial\Omega$ est de classe $C^{1,1}$, et u est dans H^2 jusqu'au bord. En particulier, on peut justifier l'écriture (32). Un argument de "bootstrap" donne alors la régularité C^∞ : on se fixe un point $x \notin \overline{D\cup N}$ de la frontière. Pour $\theta > 1$ fixé, ∇u est $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ au voisinage de x. Donc κ aussi, donc la frontière est en réalité $C^{2,\alpha}$. Mais alors, ∇u est $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *et cætera*.

Le cas de l'élasticité linéarisée. Pour obtenir le même résultat dans le cas vectoriel, on se heurte à deux écueils importants. D'abord, les variations de domaines ne sont pas évidentes à réaliser, et il n'est pas facile d'obtenir une équation du type (32) sans information de régularité *a priori*. Mais surtout, on ne sait pas si la condition de sphère extérieure entraîne une borne sur $|e(u)|$. On peut se ramener à un problème conjugué (via la fonction de "Airy"), il faudrait alors démontrer que si $w \in H^2$ vérifie $\Delta^2 w = 0$, $w = \nabla w = 0$ sur $\partial\Omega$, alors la condition de sphère extérieure suffit à entraîner que $|D^2 w|$ est bornée jusqu'au bord.

Dimension supérieure. En dimension $N \geq 3$, la situation se complique. En particulier, une borne sur la courbure intérieure du type $\kappa \leq \lambda/\mu$ n'est plus suffisante pour obtenir une condition de type sphère extérieure—puisque κ n'est que la courbure moyenne. Des situations pathologiques pourraient se produire, comme par exemple un point au voisinage duquel Ω est formé d'une infinité de petits tubes (localement dense), d'aire et de volume très petits et qui transmettent chacun une petite partie de la force (ou du flux) totale. Il serait important d'éliminer ces situations, pour justifier les calculs numériques 3D qui sont effectués avec ce genre de méthode (*cf.* [51]).

4.3 Des exemples de calculs de formes

4.3.1 Optimisation de la compliance [3]

Avec B. Bourdin, nous nous sommes intéressés au calcul pratique des solutions de problèmes du type (31). L'idée de pénaliser le périmètre dans des problèmes d'optimisation topologique a sans doute été introduite dans [119]. De nombreuses variantes ont été étudiées depuis tant théoriquement que numériquement, voir par exemple [41, 140, 143, 141, 142, 146, 147]. En réalité, nous avons regardé une situation un peu différente de celle décrite dans la section 4.2 et dans la plupart de ces articles. Nous avons cherché à comprendre comment optimiser une structure lorsque la force appliquée dépend elle-même de la forme inconnue. Ce peut être une force interne (un poids) qui va dépendre de la densité locale du matériau (idéalement 0 ou 1), ou bien une force de pression exercée sur une partie inconnue du bord. D'autres chercheurs se sont penchés récemment sur ces problèmes, voir [79, 120].

Dans notre modèle, on se donne une boîte B dans lequel on cherche une structure S. Sur une partie Γ^0 de ∂B, on fixe le déplacement à zéro[5]. A l'intérieur, on suppose que sur S agissent une

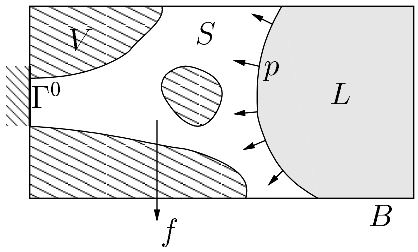

FIG. 14 – La configuration

force interne $f(x)$ qui est régulière et ne dépend que de $x \in B$, et une pression $p(x)$ (également régulière en x) qui s'applique sur une partie du bord de S. Pour déterminer la partie du bord de S sur laquelle s'exerce la pression, on introduit deux autres phases dans B, à savoir, le vide V et un liquide fictif L, au bord duquel la pression s'exerce (voir Figure 14). Etant donnée une partition $\{S, L, V\}$ de B, le problème d'équilibre pour la structure est alors le minimiseur $\bar{u}$ de

$$E(\{S,L,V\},u) = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{A}e(u)(x) : e(u)(x)\,dx - \int_S f(x)\cdot u(x)\,dx \\ - \int_{\partial L\cap B} p(x)\,u(x)\cdot \nu_L(x)\,d\mathcal{H}^{N-1}(x) \quad (33)$$

[5] On peut aussi sur une (autre) partie du bord demander au déplacement u de vérifier seulement $u \cdot \nu_B = 0$; si les forces sont équilibrées à l'intérieur de B on peut même n'imposer que ce type de condition et n'avoir aucune partie du bord où est imposée la condition $u = 0$.

parmi tous les déplacements admissibles, c'est-à-dire, les déplacements $u \in H^1(B;\mathbb{R}^N)$ tels que $u = 0$ sur Γ^0. Ici ν_L est la normale extérieure à L, et le terme $\int_{\partial L} p u \cdot \nu_L$ correspond au travail des forces de pression au bord du liquide, tandis que $\int_S f \cdot u$ correspond au travail des forces internes dans la structure. La compliance est alors le travail des forces à l'équilibre, soit $C(\{S,L,V\}) = \int_S f\cdot\bar{u} + \int_{\partial L\cap B} p\,\bar{u}\cdot\nu_L\, d\mathcal{H}^{N-1}$. A nouveau, cette quantité vaut $-2E(\{S,L,V\},\bar{u})$, et on peut donc toujours définir

$$C(S,L,V) \;=\; -2\inf_u E(\{S,L,V\},u). \tag{34}$$

On peut faire ici plusieurs commentaires. Si ∂S est assez régulière, si chaque composante connexe de S touche Γ^0, et si $\partial L\cap\partial V = \emptyset$, la minimisation de (33) va être équivalente à un problème de minimisation dans $H^1(S)$ avec condition de Dirichlet $u=0$ sur $\partial S\cap\Gamma^0$. Ce problème sera exactement le problème mécanique "réel" qu'on cherche à optimiser. Malheureusement nous verrons qu'on est obligé de travailler avec une version plus faible encore de (33), dont nous ne savons pas si elle est équivalente au problème "réel". Si $\partial L\cap\partial V\neq\emptyset$, alors l'infimum de E sur les u admissibles vaut $-\infty$, et $C=+\infty$: la pression pousse le vide et l'envoie à l'infini—puisque celui-ci ne résiste pas. C'est le comportement qu'on souhaite, et en effet, en pratique, on n'observera pas d'interface Liquide–Vide, pour les configurations de compliance finie. Mais la justification théorique de ce fait n'est pas évidente pour la formulation faible que nous allons introduire. (On ne sait traiter que la dimension $N=2$.)

Dans notre formulation faible, S, L, V sont des ensembles de périmètre fini, soit, par définition, tels que $\chi_S,\chi_L,\chi_V\in BV(B)$. Sans rentrer ici trop dans les détails, précisons qu'on impose en un certain sens également des conditions de Dirichlet pour S,L,V. En pratique, on se donne trois ensembles $\Gamma_S,\Gamma_L,\Gamma_V\subset\partial B$, et on demande par exemple à la trace de χ_S de valoir 1 sur Γ_S et 0 sur $\Gamma_L\cup\Gamma_V$: lorsque ce n'est pas le cas, on considère alors qu'on est dans la frontière de S et on en tient compte dans la mesure $D\chi_S$ (et dans le périmètre de S). Les mesures $D\chi_S$, $D\chi_V$, $D\chi_L$ sont donc définies sur $B\cup\Gamma^\rho$ où $\Gamma^\rho = \Gamma_S\cup\Gamma_L\cup\Gamma_V$, par exemple on a

$$D\chi_S \;=\; -\nu_S\, d\mathcal{H}^{N-1}\llcorner\partial_* S \;+\; (1-\chi_S)\nu_B\, d\mathcal{H}^{N-1}\llcorner\Gamma_S \;+\; \chi_S\nu_B\, d\mathcal{H}^{N-1}\llcorner(\Gamma_L\cup\Gamma_V)\,.$$

($\partial_* S$ est la frontière au sens de la mesure de Lebesgue.) Pour des raisons techniques on doit demander à $\Gamma^0\cup\Gamma^\rho$ de recouvrir tout le bord ∂B. Dans ce cadre, l'énergie se réécrit

$$E(\{S,L,V\},u) \;=\; \frac{1}{2}\int_B \chi_S\mathbf{A}e(u)(x):e(u)(x)\,dx \;-\; \int_B \chi_S f(x)\cdot u(x)\,dx \\ +\; \int_{B\cup\Gamma^\rho} p(x)u(x)\cdot D\chi_L(x) \tag{35}$$

et la compliance reste définie par (34).

Pour pénaliser le périmètre, on introduit la fonctionnelle (s.c.i.)

$$\Lambda(S,L,V) \;=\; |D\chi_L|(\Omega\cup\Gamma^\rho) \;+\; |D\chi_V|(\Omega\cup\Gamma^\rho)$$

qui essentiellement mesure la somme des périmètres de L et V. On voit que l'interface Liquide–Vide est pénalisé deux fois plus que les deux autres interfaces, ce qui n'est pas un problème puisqu'on espère de toute façon avoir $\partial L\cap\partial V=\emptyset$.

On cherche alors à résoudre

$$\min_{\{S,L,V\}} C(S,L,V) \;+\; \lambda\Lambda(S,L,V), \tag{36}$$

où le minimum est pris sur les partitions de B de périmètre fini avec des proportions données $|S| = \theta_S|B|$, $|L| = \theta_L|B|$, $|V| = \theta_V|B|$, $\theta_S+\theta_L+\theta_V = 1$. $\lambda > 0$ est un paramètre fixé. On obtient aisément l'existence d'une solution (le problème a été affaibli dans ce but), sous l'hypothèse qu'il existe au moins une partition d'énergie finie.

Il n'est pas évident de savoir si une solution de ce problème est vraiment une forme admissible (par exemple, un ouvert S de B, de frontière relativement régulière). Dans [3, Sec. 5] on montre juste qu'en dimension $N = 2$, si C est finie, alors $\mathcal{H}^1(\partial_* L \cap \partial_* V) = 0$, *i.e.*, l'interface Liquide–Vide est essentiellement fermé. On en déduit alors que S satisfait les équations de l'élasticité linéarisée (existence d'un tenseur des contraintes σ, avec $\operatorname{div}\sigma + f = 0$ dans S + conditions au bord, notamment $\sigma\cdot\nu = p\nu_S$ sur l'interface Liquide–Structure, minimisant l'énergie $\int_S \mathbf{A}^{-1}\sigma : \sigma$), mais en un sens assez faible.

Calcul de solutions Pour approximer numériquement (36), on commence par modifier le problème de sorte qu'on ait toujours l'existence d'un état d'équilibre $u \in H^1(B)$: ceci ce fait en introduisant un "matériau fictif" dans les phases L et V. On fixe $\delta > 0$ petit et on remplace l'énergie (35) par

$$E_\delta(\{S,L,V\},u) \;=\; \frac{1}{2}\int_B (\delta\chi_{L\cup V} + \chi_S)\mathbf{A}e(u)(x) : e(u)(x)\,dx \;-\; \int_B \chi_S f(x)\cdot u(x)\,dx \\ + \int_{B\cup\Gamma^\rho} p(x)u(x)\cdot D\chi_L(x)\,, \tag{37}$$

ce qui veut dire que L et V ont un comportement linéaire–élastique de loi de Hooke $\delta\mathbf{A}$. Il est facile de voir que $E_\delta(\{S,L,V\},\,\cdot\,)$ a toujours un minimiseur parmi les u admissibles. La compliance approximée est alors à nouveau $C_\delta(S,L,V) = -2\min_u E_\delta(\{S,L,V\},u)$, et le problème (36) est remplacé par

$$\min_{\{S,L,V\}} C_\delta(S,L,V) \;+\; \lambda\Lambda(S,L,V), \tag{38}$$

(toujours sous les mêmes contraintes).

Théorème 4.8 [3] *Pour tout $\delta > 0$ petit, (38) a une solution $(S_\delta, L_\delta, V_\delta)$. Si, de plus, (36) a une solution (i.e., s'il existe une partition de périmètre et compliance finie), alors la famille $(S_\delta, L_\delta, V_\delta)_{\delta>0}$ est relativement compacte (dans L^1, pour les fonctions caractéristiques) et toute sous-suite convergente $(S_{\delta_j}, L_{\delta_j}, V_{\delta_j})$ tend vers une solutions (S,L,V) de (36).*

Ce résultat se démontre via la Γ–convergence des problèmes duaux (un peu comme dans [35]).

On est ramené au problème du calcul numérique de solutions de (38), pour $\delta > 0$ petit. Cette fois-ci, on va approximer le terme en Λ, d'une façon relativement classique. On repère les phase S, L, V par un "champ de phase" $\rho \in BV(B)$ qui vaut -1 dans V, 0 dans S et 1 dans L. On définit pour un tel ρ $\Lambda(\rho) = \Lambda(S,L,V)$, tandis que si $\rho \in L^1(B)$ n'est pas de cette forme, on pose $\Lambda(\rho) = +\infty$.

Ensuite, on introduit un paramètre $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\Lambda_\varepsilon(\rho) = \int_B \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\rho(x)|^2 \; + \; \frac{1}{\varepsilon}W(\rho(x))\,dx$$

lorsque $\rho \in H^1(\Omega)$, satisfait les conditions de Dirichlet $\rho = -1$ sur Γ_V, $\rho = 0$ sur Γ_S, $\rho = 1$ sur Γ_L. On pose $\Lambda_\varepsilon(\rho) = +\infty$ si $\rho \in L^1(B)$ n'est pas dans cette classe. W est un potentiel régulier, strictement positif sauf $W(-1) = W(0) = W(1) = 0$.[6] Cette énergie est une variante de la fonctionnelle introduite par Cahn et Hilliard [74] pour représenter des énergies interfaciales. Elle a été étudiée notamment par Modica et Mortola [128, 129] (voir aussi [31, 104]) et il n'est pas trop difficile de vérifier que notre variante Λ_ε Γ–converge dans $L^1(B)$ vers Λ, en adaptant les résultats connus.

On introduit des fonctions “indicatrices de phases” $\tilde S, \tilde L, \tilde V : \mathbb{R} \to [0,1]$, régulières : $\tilde S(0) = 1$, $\tilde S(t) = 0$ si $|t| \geq 1$, $\tilde S$ croît sur $(-1,0)$ et décroît sur $(0,1)$, $\tilde L(t) = 0$ si $t \leq 0$, 1 si $t \geq 1$, et $\tilde L$ croît sur $(0,1)$, et $\tilde V = 1 - \tilde L - \tilde S$. L'idée est que pour $x \in B$, $\tilde S(\rho(x))$ indique quelle proportion de la phase S se trouve en x, $\tilde L(\rho(x))$ donne la proportion de L, $\tilde V(\rho(x))$ celle de V. Ces fonctions servent à définir E_δ lorsque $\rho \in L^1(B)$ ne prend pas que les valeurs $-1, 0, 1$:

$$\begin{aligned} E_\delta(\rho,u) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_B \left(\delta\left[\tilde L(\rho(x)) + \tilde V(\rho(x))\right] + \tilde S(\rho(x))\right) Ae(u)(x) : e(u)(x)\,dx \\ &\quad - \int_B \tilde S(\rho(x)) f(x)\cdot u(x)\,dx \\ &\quad - \int_B \tilde L(\rho(x))\,\mathrm{div}\,(pu)(x)\,dx \; + \; \int_{\Gamma_L} p(x)u(x)\cdot\nu_\Omega(x)\,d\mathcal{H}^{N-1}(x)\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Lorsque $\rho \in BV(B;\{-1,0,1\})$, on retrouve (après une intégration par parties) exactement (37). Il suffit alors de poser $C_\delta(\rho) := -2\min_u E_\delta(\rho,u)$, sur les déplacements u admissibles. Le problème qu'on résout numériquement est

$$\min_\rho C_\delta(\rho) \; + \; \lambda\Lambda_\varepsilon(\rho) \tag{40}$$

sous des contraintes de proportions définies en terme d'intégrales de ρ (par exemple, $\int_B \tilde S(\rho) = \theta_S|B|$, *etc*).

Théorème 4.9 [3] *Soit $\delta > 0$ fixé. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ petit, (40) a une solution ρ_ε. De plus, $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est compacte dans $L^1(B)$ et si ρ est la limite d'une sous-suite $(\rho_{\varepsilon_j})_j$, $(S,L,V) = (\{\rho = 0\},\{\rho = 1\},\{\rho = -1\})$ est solution de (38).*

Pour les détails de l'algorithme, qui alterne minimisation en u (pour calculer la dérivée $D_\rho C_\delta$, qui s'exprime assez simplement en fonction de $u = \arg\min_u E_\delta(\rho,u)$) et minimisation en ρ (explicite en ce qui concerne le terme en $D_\rho C_\delta$, semi–implicite pour le terme en $D_\rho\Lambda_\varepsilon$), nous renvoyons à l'article. La Figure 15 donne un exemple de calcul de la forme d'un piston. Le schéma de gauche explique la situation : le petit rectangle noir est une zone où $u = 0$ et où on veut raccrocher la structure (on a donc $\Gamma^0 = \Gamma_S =$ le bord de ce rectangle). Le long de la base

[6] W satisfait de plus une condition de croissance à l'infini et la condition technique $\int_{-1}^0 \sqrt{2W(t)}\,dt = \int_0^1 \sqrt{2W(t)}\,dt = 1$ qui assure que Λ_ε va Γ–converger exactement vers Λ, sans apparition de constantes multiplicatives.

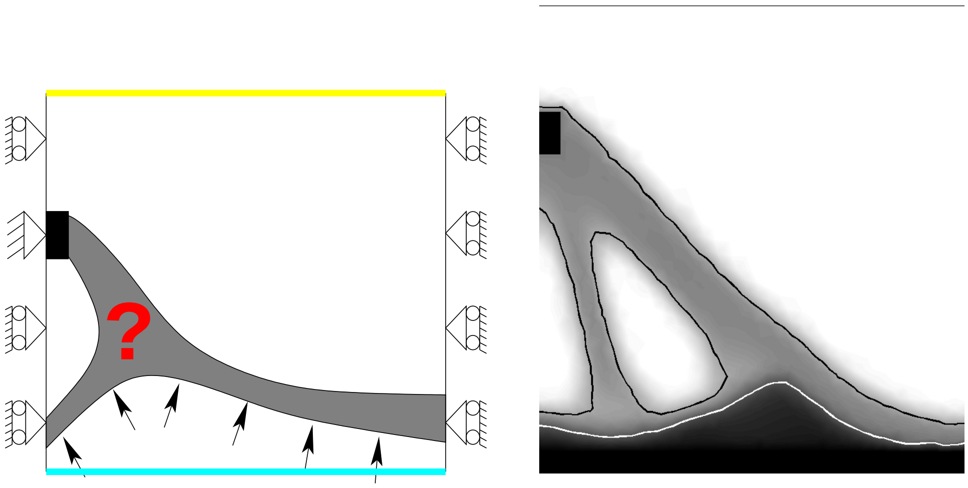

FIG. 15 – Calcul d'un piston

inférieure de la boîte, on trouve Γ^L. La pression p est constante et la force interne f est nulle. Sur le bord supérieure de la boîte, on a Γ_V. A gauche et à droite, en dehors du rectangle noir, on a juste fixé $u \cdot \nu_B = 0$. La figure de droite donne le résultat du calcul : en foncé, L, en gris plus clair, S, en blanc, V. Les lignes de niveau $-1/2$ et $1/2$ ont été mises en évidence.

4.3.2 La forme d'un film cristallin [1]

Ici, nous décrivons rapidement un travail effectué en collaboration avec Eric Bonnetier. L'approche et les méthodes sont assez semblables à ce qui a été décrit dans la section précédente.

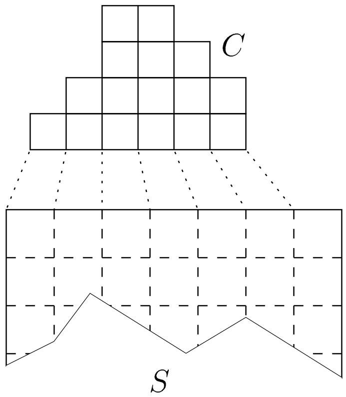

FIG. 16 – Le dépôt de cristal C sur un substrat S

La situation est illustrée par la Figure 16 : on veut modéliser le dépôt d'un film cristallin C sur un substrat S (très rigide). La différence entre les distances interatomiques des deux matériaux font que le cristal est contraint hors de son état d'équilibre, son réseau devant s'étirer horizontalement pour s'adapter à celui du substrat. Pour libérer une partie de l'énergie élastique due à ces contraintes, les atomes du cristal ont la possibilité de diffuser. Deux énergies entrent alors en compétition : l'énergie élastique à l'intérieur du cristal, et sa tension superficielle, proportionnelle en première approximation à la surface du cristal. Cette dernière tend à favoriser le dépôt d'un film plan, tandis qu'on vérifie facilement que la première, au contraire, va favoriser l'apparition d'oscillations ou de petites colonnes de cristal (que l'introduction d'une force de gravitation devrait pénaliser).

Cette compétition est à l'origine des "SDRI" (stress–driven rearrangement instabilities, instabilités de réarrangement dues aux contraintes dites aussi d'Asaro–Tiller–Grinfeld), observées par les mécaniciens, et des phénomènes "d'islanding" (création de petits îlots isolés de cristal à la surface du substrat). L'étude de ces défauts est importante par exemple pour mieux contrôler la croissance épitaxiale des films cristallins dans le processus de fabrication des semiconducteurs. Certains pensent aussi que ces instabilités pourraient constituer un processus d'initiation des fractures dans les matériaux fragiles, phénomène qui reste inexpliqué dans la théorie de Griffith classique [122] (voir aussi la section 5). Les premiers travaux décrivant ce type d'instabilités sont ceux d'Asaro et Tiller [48] puis de Grinfeld [116, 117] ; voir aussi [108, 133] pour un exposé plus général des problèmes. Un intérêt énorme s'est développé pour ce sujet au cours des dix dernières années, voir encore [82, 83, 107, 118, 150, 149, 148, 151].

Avec E. Bonnetier, nous avons essentiellement cherché à mettre au point un petit modèle énergétique et une approche numérique le calcul de la forme d'équilibre d'un tel dépôt, en dimension 2. Un premier modèle, étudié par E. Bonnetier, R. S. Falk et M. A. Grinfeld [58], modélisait le système par l'énergie

$$K \int_0^1 h(x)\, u'(x)^2\, dx \; + \; \int_0^1 \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx$$

où h est la hauteur du cristal ($h = 0$ correspond au substrat nu), u est un déplacement horizontal (scalaire) qui ne dépend que de la variable horizontale $x \in (0, 1)$, et la contrainte est représentée par les conditions aux limites $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ tandis qu'on demande à h d'être 1–périodique. Le premier terme de l'énergie représente l'énergie interne du cristal ($K > 0$ est un paramètre lié aux grandeurs physiques du système) et le second représente l'énergie de surface (c'est la longueur du graphe de h). L'énergie est minimisée sous une contrainte de volume, par exemple $\int_0^1 h = 1$. L'étude de [58] concluait que lorsque K est petit, le terme de tension superficielle domine et la solution est donnée par $h = 1$. Lorsque K est grand, en revanche, h a intérêt à descendre à zéro en un point x_0 pour relâcher complètement l'énergie élastique : en effet, u peut devenir discontinue en x_0, constante à gauche ($u = 0$) et à droite ($u = 1$), et le premier terme s'annule. La solution est alors donnée par la minimisation du second terme (ou plutôt de son enveloppe convexe s.c.i.).

Dans [1] nous avons essayé de proposer un modèle réellement bidimensionnel. Nous regardons la classe des domaines $\Omega \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ (où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, Ω est donc périodique en la première variable x) qui sont des sous-graphes de fonctions s.c.i. positives ou nulles. Le substrat est $S = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : y < 0\}$. Notons $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ le déroulement de Ω, c'est à dire l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ 1–périodique en x

dont la projection (canonique) sur $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ est Ω. Dans le cristal $\widehat{\Omega}\setminus\widehat{S}$ ($\widehat{S}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$), nous supposons qu'il existe un déplacement u à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que $u(x,y)-(x,0)$ est 1–périodique en x et nul pour $y=0$. Ceci signifie en particulier que le tenseur des gradients de déformations $e(u)$ est 1–périodique en x et que le matériau est soumis, sur ∂S, à la précontrainte $e(u)_{1,1}(x,0)=1$ pour tout $x\in\mathbb{T}$. Dans ce modèle, le substrat ne se déforme pas. Notre énergie s'écrit

$$E(\Omega,u) \;=\; K\int_{\Omega\setminus S}\mathbf{A}e(u)(x,y):e(u)(x,y)\,dxdy \;+\; L(\Omega) \tag{41}$$

où $\mathbf{A}$ est la loi de Hooke du matériau linéaire–élastique qui modélise le cristal. Le terme de longueur L représente la tension superficielle du cristal. Si $\Omega=\{(x,y)\,:\,y<h(x)\}$ avec $h\geq 0$ Lipschitz, alors cette énergie est *a priori* donnée par

$$\sigma_c\mathcal{H}^1(\partial\Omega\setminus\overline{S}) \,+\, \sigma_s\mathcal{H}^1(\partial\Omega\cap\partial S) \;=\; \int_0^1\left(\sigma_c\chi_{\{h>0\}}(x)+\sigma_s\chi_{\{h=0\}}(x)\right)\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx\,,$$

où σ_c est un coefficient de tension superficielle pour le cristal et σ_s est l'énergie de surface du substrat nu. En réalité, L est l'enveloppe s.c.i. de cette fonctionnelle. En particulier, lorsque $\sigma_c<\sigma_s$, il est toujours meilleur énergétiquement de déposer une couche infinitésimale de cristal sur le substrat (pour payer σ_c au lieu de σ_s), et le coefficient σ_s n'apparaît plus dans la fonctionnelle relaxée L. Si h n'est plus Lipschitz et si le bord de Ω a des fissures verticales, leur longueur doit compter double car elles correspondent à deux surfaces libres (et infiniment proches) de cristal. Ces parties verticales sont exactement $\partial\Omega\setminus\partial\overline{\Omega}$. On a donc

$$L(\Omega) \;=\; \sigma_c\left\{\mathcal{H}^1(\partial\overline{\Omega}\setminus\overline{S}) \,+\, 2\,\mathcal{H}^1(\partial\Omega\setminus\partial\overline{\Omega})\right\} \,+\, (\sigma_c\wedge\sigma_s)\mathcal{H}^1(\partial\overline{\Omega}\cap\partial S).$$

Pour trouver la forme d'équilibre on doit résoudre le problème

$$\min_{\Omega,u} E(\Omega,u) \tag{42}$$

sous une contrainte de volume $|\Omega\setminus S|=1$, et où u parcourt tous les déplacements admissibles pour Ω. On montre alors que ce problème a une solution.

Pour calculer cette solution, on procède comme dans la section 4.3.1. On approxime la fonction caractéristique de Ω par "un champ de phase", c'est-à-dire une fonction v à valeurs dans $[0,1]$, décroissante en y (ce qui correspond au fait que Ω doive être un sous-graphe), définie sur tout $S^c=\{(x,y)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}\,:\,y\geq 0\}$. Puis on remplace L par une fonctionnelle de type Cahn–Hilliard dépendant d'un paramètre d'échelle $\varepsilon>0$:

$$L_\varepsilon(v) \;=\; 2\sigma_c\left(\frac{4\varepsilon}{\pi}\int_{S^c}|\nabla v(x,y)|^2\,dxdy \;+\; \frac{1}{\varepsilon}\int_{S^c}v(x,y)(1-v(x,y))\,dxdy\right)$$

où $v\in H^1(S^c;[0,1])$ vérifie la condition de Dirichlet $v(x,0)\geq v_s$, avec $v_s\in(0,1]$ une constante qui vaut 1 lorsque $\sigma_c<\sigma_s$ (la surface $y=0$ de S est alors recouverte d'une couche de cristal), et qu'on peut calculer en fonction de σ_s,σ_c dans les autres cas. (On pourrait prendre pour L_ε une fonctionnelle d'expression plus générale $c\varepsilon\int_{S^c}|\nabla v|^2+(c'/\varepsilon)\int_{S^c}W(v)$ où W est un potentiel positif à deux puits $W(0)=W(1)=0$.) Notons que d'autres approches par champ de phase pour modéliser des film cristallins et étudier les instabilités ont été proposées, voir [124, 134, 123].

On montre facilement la Γ–convergence de L_ε vers L. Il suffit alors de définir pour tout $\varepsilon > 0$

$$E_\varepsilon(v,u) \;=\; K\int_{S^c} (v(x,y)+\eta_\varepsilon)\mathbf{A}e(u)(x,y) : e(u)(x,y)\,dxdy \;+\; L_\varepsilon(v) \tag{43}$$

où $\eta_\varepsilon = o(\varepsilon)$ est un petit paramètre positif introduit pour des raisons techniques. Ici, $u \in H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^2)$ est telle que $u(x,y)-(x,0)$ est 1–périodique et s'annule en $y=0$. On montre alors le résultat suivant :

Théorème 4.10 [1] *Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs avec $\varepsilon_n \downarrow 0$ quand $n \to \infty$.*

(i) Soit (v_n,u_n) telles que

$$\sup_{n\geq 1} E_\varepsilon(v_n,u_n) \;<\; +\infty \tag{44}$$

et $\sup_{n\geq 1}\int_{S^c} v_n(\xi)\,d\xi < +\infty$. Alors il existe Ω sous-graphe, u admissible pour Ω, et une sous-suite de $(v_n,u_n)_{n\geq 1}$ (notée encore (v_n,u_n)), tels que $v_n \to \chi_\Omega$ p.p. dans S^c, $u_n \to u$ dans $L^2_{loc}(\widehat{\Omega}\setminus\widehat{S};\mathbb{R}^2)$ quand $n\to\infty$, et

$$E(\Omega,u) \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} E_{\varepsilon_n}(v_n,u_n). \tag{45}$$

(ii) Soit Ω un sous-graphe et u admissible pour Ω. Alors, il existe une suite $(v_n,u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $v_n \to \chi_\Omega$ p.p. dans S^c, $u_n \to u$ dans $L^2_{loc}(\widehat{\Omega}\setminus\widehat{S};\mathbb{R}^2)$ quand $n\to\infty$, et

$$\limsup_{n\to\infty} E_{\varepsilon_n}(v_n,u_n) \;\leq\; E(\Omega,u). \tag{46}$$

On peut de plus supposer que pour tout n, $\int_{S^c} v_n(\xi)\,d\xi = |\Omega\setminus S|$.

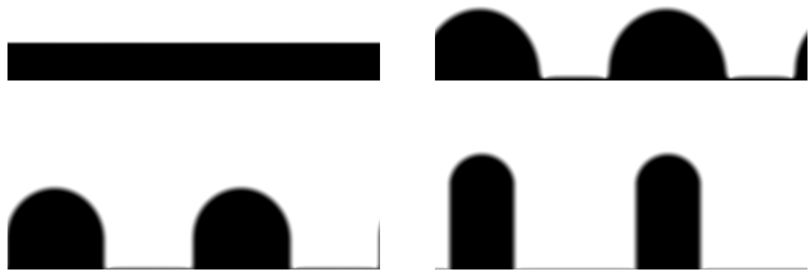

FIG. 17 – De gauche à droite et de haut en bas : $K = 0.05$, $v_s = 1$; puis $K = 6$, $v_s = 1$, $v_s = 0.6$, $v_s = 0.4$.

La conséquence immédiate de ce théorème et que si on minimise pour tout ε_n l'énergie E_{ε_n}, sous une contrainte de volume, par exemple $\int_{S^c} v = V$, les minimiseurs (v_n,u_n) vont former une suite compacte dont les points d'accumulation décrivent des solutions de (42), sous contrainte $|\Omega\setminus S| = V$.

Nous effectuons dans [1] plusieurs expériences numériques. Pour K petit, $V=1$, on retrouve une configuration plane (Fig. 17, haut, gauche). Pour K plus grand, et différentes valeurs de

v_s (donc de σ_s), nous obtenons des îlots, plus ou moins rapprochés en fonction de la valeur de σ_s (Fig. 17). Enfin, Figure 18, nous illustrons l'instabilité du système pour K grand. Notons qu'ici la configuration de départ est un état d'équilibre (qui se calcule explicitement, et qui correspond à une couche parfaitement plane de cristal), et que seule l'instabilité numérique provoque la divergence, après un grand nombre d'itérations, vers d'autres états. Notons aussi que la dynamique ici est donnée par le gradient descendant de (43), ce qui ne correspond pas à la dynamique physique de ce type de système (équation de diffusion de surface). Nous nous intéressons désormais à un modèle tridimensionnel (pour lequel F. Jouve a déjà effectué des simulations numériques) mais les difficultés techniques sont plus nombreuses.

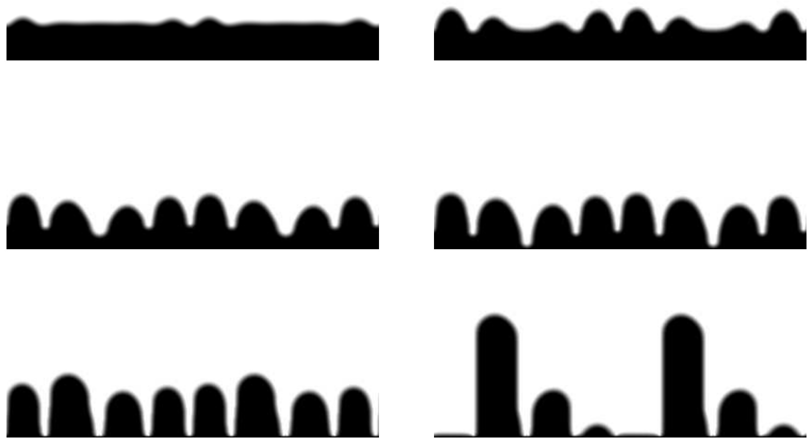

FIG. 18 – De gauche à droite et de haut en bas : $K = 20$, itérations 1936, 1940, 1944, 1948, 2000, 2100.

5 La croissance des fractures

Introduite *a priori* pour résoudre des problèmes de traitement d'images, la fonctionnelle de Mumford et Shah s'est révélée riche d'autres applications potentielles. Nous exposons ici rapidement le modèle de croissance des fractures dans les matériaux élastiques proposé par G. Francfort et J. J. Marigo [106], avant de décrire certains de nos travaux ayant un lien avec cette approche.

5.1 Le modèle de Francfort et Marigo

Nous exposons ici une version simplifiée, pour le cas général voir [106]. Supposons qu'un matériau élastique occupe un domaine (ouvert borné régulier) Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3 en pratique). Le matériau peut se casser le long d'une hypersurface $K \subset \overline{\Omega}$, et on suppose, en accord avec la théorie de Griffith, que l'énergie qu'il faut fournir pour créer la fracture K est proportionnelle à $\mathcal{H}^{N-1}(K)$, la surface de K.

On se donne une frontière de Dirichlet $\partial_d\Omega \subset \partial\Omega$ (ouverte dans $\partial\Omega$), sur laquelle on va imposer un déplacement U. Par hypothèse U sera la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$. A l'intérieur de Ω, le déplacement u est une fonction de $L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, et si ∇u est le gradient distributionnel (à valeurs dans les matrices $N \times N$) de u dans l'ouvert $\Omega \setminus K$, on suppose que $e(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$ (le gradient symétrisé) est dans $L^2(\Omega;\mathcal{S}^{N\times N})$ (où $\mathcal{S}^{N\times N}$ sont les matrices symétriques $N \times N$). On va demander à u de coïncider avec le déplacement imposé U sur $\partial\Omega \setminus K$: un tel u est alors dit admissible pour K, U.

L'énergie nécessaire pour créer une fracture K est

$$E_s(K) \;=\; \mathcal{H}^{N-1}(K \setminus \partial_n\Omega)$$

où $\partial_n\Omega$ est le complémentaire de $\partial_d\Omega$ dans $\partial\Omega$ (cette partie de la frontière étant libre, l'ensemble $K \cap \partial_n\Omega$ n'a aucune signification physique et ne doit pas être pénalisé). L'énergie associée à un déplacement u admissible est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus K} \mathbf{A}e(u)(x) : e(u)(x)\,dx$$

où le tenseur $\mathbf{A}$ définit une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{S}^{N\times N}$. Etant donnés U et K, on définit donc

$$E_d(K,U) \;=\; \inf_u \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus K} \mathbf{A}e(u)(x) : e(u)(x)\,dx \tag{47}$$

où l'infimum (qui est en réalité un minimum) est pris sur les u admissibles. L'énergie totale est donc

$$E(K,U) \;=\; E_d(K,U) \,+\, E_s(K).$$

L'idée de Francfort et Marigo est alors de définir une évolution discrète de la manière suivante : on se donne des temps $t_1, \dots t_p$, une suite de chargements $U_i = U(t_i)$, $i = 1, \dots, p$, et une fracture initiale K_0. On suppose alors que la fracture K_i au temps t_i va vérifier

$$K_i \supseteq K_{i-1} \text{ et } E(K_i,U_i) \;=\; \min_{K\supseteq K_{i-1}} E(K,U_i). \tag{48}$$

L'idée est ensuite d'essayer de faire tendre vers zéro le pas de temps $\max_i(t_i - t_{i-1})$. Dans le cas où $U(x,t) = tU_0(x)$ pour $t \geq 0$, $U = 0$ pour $t < 0$, U est un "*monotonically increasing loading*" ou "*M.I.L.*". Ils postulent alors l'évolution suivante.

Définition 5.1 ([106, Def. 2.9]) *Soit $U(t)$ un M.I.L. : alors $K(t)$ doit vérifier*

(i) K croît avec t, et $K(t) = K_0$ pour $t < 0$;

(ii) $E(K(t), U(t)) \leq E(K, U(t))$ pour tout $K \supseteq \bigcup_{s<t} K(s)$;

(iii) $E(K(t), U(t)) \leq E(K(s), U(t))$ pour tout $s < t$.

Francfort et Marigo montrent que si une fracture dans un matériau élastique progresse de façon continue le long d'une ligne régulière en vérifiant les axiomes *(i-iii)*, alors l'avancée de cette fracture obéit au critère de Griffith.

Les intérêts de cette approche sont nombreux. Entre autres, elle permettrait d'expliquer l'initiation d'une fracture, alors que la théorie de Griffith classique ne peut expliquer que son évolution. Par ailleurs, il est possible de calculer numériquement, en adaptant les algorithmes décrits dans la section 3.4, des évolutions de fracture. L'article de Bourdin, Francfort et Marigo [63] donne plusieurs exemples.

L'exemple de la Figure 19 a été calculé par Blaise Bourdin en utilisant la fonctionnelle (24). Il s'agit d'un matériau collé à un renfort cylindrique, vu en coupe. Le déplacement est supposé antiplan (c'est-à-dire qu'il est donné par une variable scalaire u qui mesure le déplacement du matériau perpendiculairement au plan de la figure). Sur la couronne extérieure, le déplacement est nul. Le renfort (représenté par le noyau circulaire central) est tiré dans une direction. La figure montre le moment où la fracture apparaît : celle-ci apparaît alors d'un seul coup tout autour du renfort qui est instantanément séparé du matériau. On montre successivement le maillage de départ, l'indicateur de discontinuité v calculé sur ce maillage, puis le maillage après deux optimisation successive et l'indicateur de discontinuité correspondant (*cf.* Section 3.4.2 et l'explication de la variable v page 26).

Une preuve d'existence pour ces évolutions (discrète et continue) reste inconnue dans le cas général. A l'heure actuelle on sait traiter les cas suivants :

- cas scalaire bidimensionnel (l'énergie est de la forme $\int |\nabla u|^2$), avec une limite sur le nombre de composantes connexes de la fracture (Dal Maso et Toader [88]) ;
- cas vectoriel (linéaire–élastique) bidimensionnel, avec la même restriction sur le nombre de composantes connexes de la fracture [9] ;
- cas scalaire N–dimensionnel avec une formulation faible (Francfort et Larsen [105]).

Ce dernier résultat généralise en dimension quelconque le Théorème 5.4 cité plus loin, sans aucune restriction de type topologique sur la fracture K. Cette dernière n'est alors plus nécessairement un ensemble fermé, mais seulement un ensemble rectifiable $(N-1)$–dimensionnel, croissant avec le temps.

Dans la suite nous allons d'abord décrire un modèle très simplifié que nous avons étudié avec F. Doveri à la SISSA en 1996, puis le résultat récent de [9], qui montre comment étendre le travail

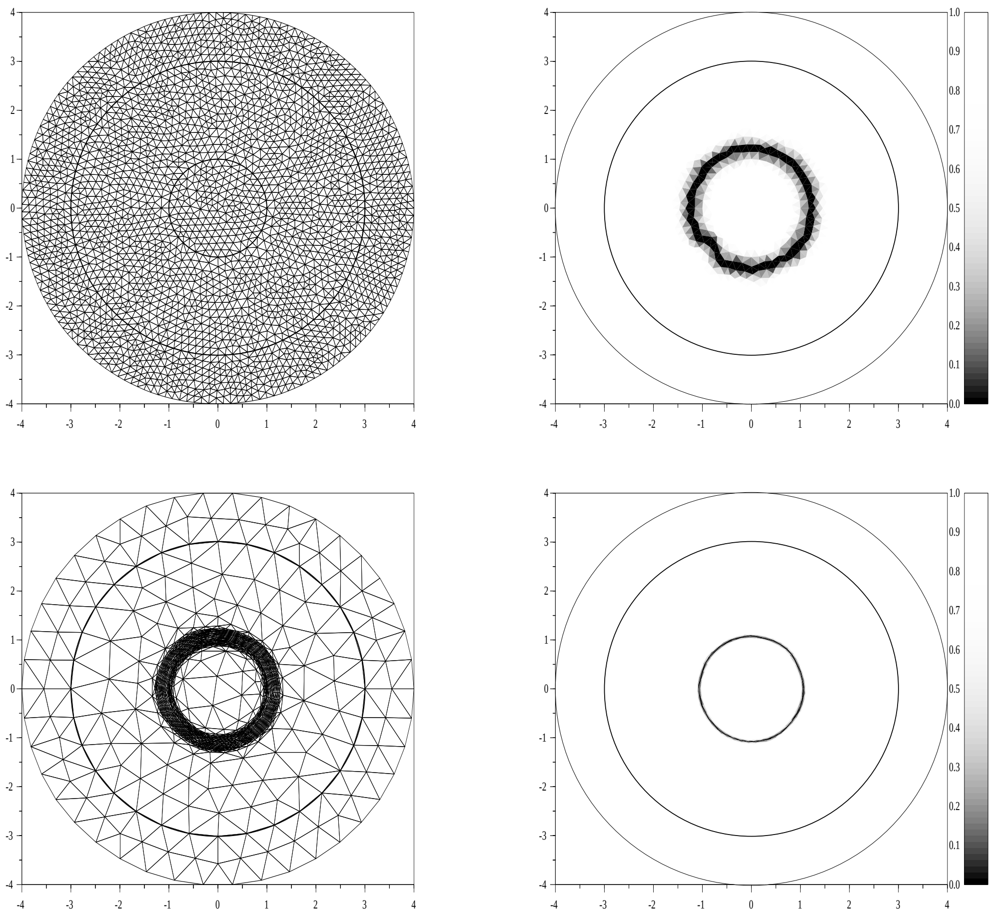

FIG. 19 – L'apparition d'une fracture calculée avec la fonctionnelle (24)

de Dal Maso et Toader au cas vectoriel.

5.2 Un modèle très simplifié [13]

Dans [13], nous nous sommes intéressés au problème des "mouvements minimisants de la fonctionnelle de Mumford et Shah". Pour une introduction générale aux "mouvements minimisants" de De Giorgi nous renvoyons à [39]. Si $F(u)$ est une fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega)$ (et s.c.i. faible), étant donnée u_0 et un pas de temps $\delta t > 0$, on peut définir pour $i = 1, \ldots$

$$u_i \;=\; \arg\min_{u \in L^2(\Omega)} F(u) \;+\; \int_\Omega \frac{|u(x) - u_{i-1}(x)|^2}{\delta t}\, dx\,.$$

On peut ensuite poser, pour $t \geq 0$, $u_{\delta t}(t) = u_{[t/\delta t]}$ ($[\cdot]$ désigne la partie entière). Dans le cas où F est convexe, on sait que lorsque $\delta t \to 0$, $u_{\delta t}$ va converger vers u solution de

$$\frac{du}{dt} \;+\; \frac{1}{2}\partial F(u) \;\ni\; 0$$

(où ∂F est le sous-différentiel de F). Par exemple, lorsque $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ est la fonctionnelle de Dirichlet, u résout l'équation de la chaleur (avec condition de Neumann homogène au bord).

Que se passe-t-il lorsque F est la fonctionnelle de Mumford et Shah ($F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ si $u \in GSBV(\Omega)$, $+\infty$ sinon) ? Dans [13] nous avons tenté d'étudier ce problème, avec comme contrainte la croissance de l'ensemble de saut S_u (avec l'idée qu'il s'agit d'une fracture qui croît). On suppose que $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Nous montrons alors qu'en général, la limite u est dans $SBV(\Omega \times [0,+\infty)$ vérifie $\partial u/\partial t = \operatorname{div} \nabla u$ où ceci désigne la divergence au sens des distributions du gradient "approximatif" (en x) de u (*i.e.*, à t fixé, $Du \llcorner (\Omega \setminus S_u)$). Cette équation ne caractérise pas totalement le mouvement limite, et il est à parier qu'en utilisant les méthodes de [105] on pourrait grandement préciser ce résultat.

Nous nous sommes ensuite restreints au cas particulier, plus simple, où $N = 2$ et où on impose de plus à l'ensemble des sauts K d'être croissant et d'avoir à chaque instant un nombre fini, uniformément borné, de composantes connexes. Sous ces contraintes, nous établissons le résultat suivant.

Théorème 5.2 [13] *Soit $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Il existe alors $K(t)$ compact croissant en t et $u(t,x) \in H^1(\Omega \times (0,T)) \setminus \mathcal{K})$ pour tout $T < +\infty$, où $\mathcal{K} = \cup_{t \geq 0} K(t) \times \{t\}$, vérifiant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \textit{dans } (\Omega \times (0,+\infty)) \setminus \mathcal{K} \ ; \\ u(\cdot,0) \to u_0 & \textit{fortement dans } L^2(\Omega) \textit{ quand } t \to 0 \ ; \\ \nabla u(x) \cdot \nu(x) = 0 & \textit{(au sens faible) sur } \partial(\Omega \setminus K(t)) \textit{ pour tout } t > 0 \,, \end{cases} \tag{49}$$

telle qu'à une sous-suite près, $u_{\delta t}$ converge vers u dans $L^2(\Omega \times [0,T))$ pour tout $T > 0$. De plus, $u \in C^0([0,+\infty); L^2(\Omega)) \cap C^{0,1/2}((a,+\infty); L^2(\Omega))$ pour tout $a > 0$, et on a pour tous $t_1 < t_2$ l'estimation d'énergie suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt + \frac{1}{2} F(u(\cdot,t_2), K(t_2)) \ \leq \ \frac{1}{2} F(u(\cdot,t_1), K(t_1)) \,. \tag{50}$$

Ici $F(u,K) = \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^1(K)$ est l'énergie (forte) de Mumford et Shah. Notons qu'à $\mathcal{K}$ fixée, la solution u de (49) est unique.

La partie difficile de ce théorème est la preuve que $u(t)$ satisfait une condition de Neumann sur l'ensemble de discontinuité $K(t)$. Celle-ci provient du Théorème 4.1, montré dans [12], et énoncé plus loin. Il entraîne la propriété suivante, utilisée dans la preuve du Théorème 5.2 :

Lemme 5.3 *Soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles compacts de dimension 1, ayant un nombre uniformément borné de composantes connexes, tels que $\sup_n \mathcal{H}^1(K_n) < +\infty$ et convergeant vers un compact K pour la distance de Hausdorff. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de fonctions de $H^1(\Omega \setminus K_n)$, telles que $\Delta u_n = f_n \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u_n \cdot \nu = 0$ (au sens faible) sur $\partial(\Omega \setminus K_n)$ (ν désignant le vecteur normal). Alors si $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(\Omega)$, $u_n \to u$, $\nabla u_n \to \nabla u$ (fortement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$), où $u \in H^1(\Omega \setminus K)$ est la solution de $\Delta u = f$, $\nabla u \cdot \nu = 0$ (au sens faible) sur $\partial(\Omega \setminus K)$.*

5.3 Un résultat d'existence en dimension deux [9]

Dans [88], G. Dal Maso et R. Toader considèrent l'approche de Francfort et Marigo dans le cas bidimensionnel, scalaire. Le cas scalaire peut être vu, d'un point de vue mécanique, comme le cas où le déplacement ne s'effectue que perpendiculairement au plan du matériau ("déplacement antiplan"). Ils imposent à la fracture, comme dans l'étude précédente, d'avoir un nombre uniformément borné de composantes connexes[7]. Dans ce cadre, ils établissent le résultat suivant. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des sous-ensembles compacts $K \subset \overline{\Omega}$ tels que $K \cup \partial_n \Omega$ a au plus n composantes connexes, $n \geq 1$ fixé. On reprend essentiellement les notations de la section introductive 5.1, mais dans le cas scalaire (bidimensionnel) : pour $U \in H^1(\Omega)$ et $K \in \mathcal{K}_n$, on pose

$$E_d(K,U) \ = \ \min_u \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u(x)|^2 \, dx \,, \tag{51}$$

où le minimum est pris sur les $u \in L^2_{\rm loc}(\Omega \setminus K)$ avec $\nabla u \in L^2(\Omega \setminus K; \mathbb{R}^2)$, tels que $u = U$ sur $\partial_d \Omega \setminus K$. On pose ensuite toujours $E(K,U) = E_d(K,U) + E_s(K) = E_d(K,U) + \mathcal{H}^1(K \setminus \partial_n \Omega)$.

Théorème 5.4 (Dal Maso, Toader) *Soit $T > 0$ et soit $U : [0,T] \to H^1(\Omega)$ une fonction absolument continue. Soit $K_0 \in \mathcal{K}_n$. Alors il existe $K : [0,T] \to \mathcal{K}_n$ tel que*

(a) $K_0 \subseteq K(s) \subseteq K(t)$ pour $0 \leq s \leq t \leq T$,

(b) $E(K(0),U(0)) \leq E(K,U(0)) \ \forall K \in \mathcal{K}_n, \ K \supseteq K_0$,

(c) pour tout $t \in (0,T]$, $E(K(t),U(t)) \leq E(K,U(t)) \ \forall K \in \mathcal{K}_n, \ K \supseteq \cup_{s<t} K(s)$,

(d) $t \mapsto E(K(t),U(t))$ est absolument continue sur $[0,T]$,

(e) $\displaystyle\frac{d}{ds} E(K(s),U(t))\Big|_{s=t} = 0$ pour presque tout $t \in (0,T)$.

De plus les conditions (a) à (e) entraînent également

(f) $\displaystyle\frac{d}{dt} E(K(t),U(t)) \ = \ 2 \int_{\Omega \setminus K(t)} \nabla u(t) \cdot \nabla \dot{U}(t)$ pour presque tout $t \in (0,T)$,

où $u(t)$ est pour tout t la solution du problème (51) pour $(K(t),U(t))$, et $\dot{U}$ est la dérivée en temps de U.

Ce résultat est montré un peu de la même façon que dans l'étude précédente, en partant de l'approche discrète de Francfort et Marigo et en faisant tendre le pas de temps vers zéro. La preuve repose essentiellement sur (a) de bonnes estimations a priori sur $\int |\nabla u|^2$ et $\mathcal{H}^1(K)$ – (b) un résultat du même type que le Lemme 5.3 mentionné plus haut, mais dans un cas où $f_n \equiv f \equiv 0$ et où les fonctions u_n (et u) satisfont une condition de Dirichlet sur une partie du bord. Ce lemme permet alors de montrer que si $U_n \to U$ et $K_n \to K$ (au sens de Hausdorff), les minimiseurs de (51) pour (K_n, U_n) convergent vers le minimiseur de (51) pour (K,U).

Si on cherche à généraliser ce résultat au cas vectoriel linéaire–élastique (où le problème en u est donné par (47)), on se rend compte que la seule difficulté est d'étendre ce type de continuité au cas vectoriel, c'est à dire de montrer que si $U_n \to U$ (à présent des fonctions à valeurs vectorielles, de $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$) et $K_n \to K$ (au sens de Hausdorff), les minimiseurs de (47) pour (K_n, U_n) convergent encore vers le minimiseur de (47) pour (K,U). Cette propriété se déduit aisément de la continuité pour le cas scalaire et du résultat de densité de [9], déjà mentionné (Théorème 4.6).

[7]Dans [9], on montre en fait que la bonne hypothèse est que $K \cup \partial_n \Omega$ (le bord de Neumann, défini plus haut comme le complémentaire dans $\partial\Omega$ de la zone de traction $\partial_d \Omega$) a un nombre *a priori* borné de composantes connexes.

On en déduit un théorème identique au Théorème 5.4, à ceci près que U est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, que E_d est définie à présent par (47), et que *(f)* s'écrit à présent

(f) $\displaystyle \frac{d}{dt}E(K(t),U(t)) = \int_{\Omega\setminus K(t)} \mathbf{A}e(u(t)) : e(\dot{U}(t))$ *pour presque tout* $t \in (0,T)$.

On peut vérifier que *(f)* entraîne, dans le cas où le chargement est un "MIL" (de la forme $tU_0(x)$), l'axiome *(iii)* de la définition de Francfort et Marigo.

6 Un résultat théorique sur la fonctionnelle de Mumford et Shah en dimension 1

Ici, nous allons décrire un résultat purement théorique concernant la fonctionnelle de Mumford et Shah. A priori, cette fonctionnelle n'est pas convexe, et il n'y a donc pas de méthode simple pour caractériser ses minima. Par ailleurs, elle n'est pas assez régulière pour pouvoir être étudiée par la théorie classique de Weierstrass qui fournit dans certains cas des conditions suffisantes d'optimalité, pour des fonctionnelles de la forme $\int f(x,u,\nabla u)$, non forcément convexes en u (voir par exemple [113]).

Dans [8] nous étudions la "méthode des calibrations" d'Alberti, Bouchitté et Dal Maso [32, 33] pour caractériser les minima de la fonctionnelle de Mumford et Shah. Expliquons brièvement ce que ces auteurs appellent une "*calibration*". L'idée de base, introduite par G. Bouchitté [61], consiste à représenter la fonctionnelle

$$F(u) \;=\; \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \;+\; \mathcal{H}^{N-1}(S_u) \tag{52}$$

(pour $u \in GSBV(\Omega)$, $+\infty$ sinon, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$) comme

$$F(u) \;=\; \sup_{\sigma\in K} \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma(x,t)\cdot D\mathbf{1}_u(x,t) \tag{53}$$

où : $\sigma = (\sigma^x,\sigma^t)(x,t)$ est un champ de vecteurs $N+1$–dimensionnel défini sur $\Omega\times\mathbb{R}$ (ou au moins dans un voisinage du graphe de u) ; K est un convexe à préciser, $\mathbf{1}_u(x,t) := 1$ si $u(x) < t$, 0 si $u(x) \geq t$, est la fonction caractéristique du sous-graphe de u (qui est à variation bornée dès que $u \in BV(\Omega)$.

On voit alors que si on peut trouver un champ $\sigma \in K$ tel que (i) $\operatorname{div}\sigma = 0$ dans $\Omega\times\mathbb{R}$ et (ii) $F(u) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma\cdot D\mathbf{1}_u$, u est forcément un minimiseur de F pour ses propres conditions de Dirichlet. En effet, si $v = u$ sur $\partial\Omega$,

$$F(v) - F(u) \;=\; F(v) - \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma\cdot D\mathbf{1}_u(x,t) \;\geq\; \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma(x,t)\cdot D(\mathbf{1}_v - \mathbf{1}_u)(x,t)\,.$$

Soit $A^\pm \subset \Omega\times\mathbb{R}$ les ensembles de périmètre fini donnés par $A^+ = \{(x,t)\,:\,u(x) < t \leq v(x)\}$, $A^- = \{(x,t)\,:\,v(x) < t \leq u(x)\}$. Comme $v = u$ sur $\partial\Omega$, $|D\chi_{A^\pm}|(\partial\Omega\times\mathbb{R}) = 0$, par conséquent $\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma\cdot D\chi_{A^\pm} = -\int_{A^\pm} \operatorname{div}\sigma = 0$. Mais $\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma\cdot D(\mathbf{1}_v - \mathbf{1}_u) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma\cdot D\chi_{A^+} - \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma\cdot D\chi_{A^-}$, d'où on déduit $F(v) - F(u) \geq 0$. C'est un tel champ σ, caractérisant le minimiseur u de F, qui est appelé une "*calibration*" pour u, par référence à la théorie des surfaces minimales.

Pour trouver l'ensemble K, on considère $u \in GSBV(\Omega)$ et σ assez régulier. Le flux de σ à travers le graphe de u s'écrit alors

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma(x,t)\cdot D\mathbf{1}_u(x,t) \;=\; \int_\Omega \sigma^x(x,u(x))\cdot\nabla u(x) - \sigma^t(x,u(x))\,dx \;+\; \int_{S_u}\left(\int_{u_-(x)}^{u_+(x)} \sigma^x(x,s)\,ds\right)\cdot\nu_u(x)\,d\mathcal{H}^{N-1}(x)$$

On voit qu'une condition suffisante pour que ce flux soit toujours inférieur ou égal à $F(u)$ est que dans $\Omega\times\mathbb{R}$ on ait $|p|^2 \geq \sigma^x\cdot p - \sigma^t$ pour tout $p\in\mathbb{R}^N$, et $\int_a^b \sigma^x(x,s)\,ds\cdot\nu \leq 1$ pour tout $x\in\Omega$, $a\leq b$ et $\nu\in\mathbb{S}^{N-1}$. Ceci se réécrit

$$\begin{cases} \sigma^t(x,t) \;\geq\; \dfrac{|\sigma^x(x,t)|^2}{4} & \text{pour tout } \; p\in\mathbb{R}^N,\; (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R} \\ \left|\displaystyle\int_a^b \sigma^x(x,s)\,ds\right| \;\leq\; 1 & \text{pour tout } \; x\in\Omega,\; a\leq b. \end{cases} \tag{54}$$

On peut alors définir K comme l'ensemble (convexe) des champs vérifiant (54). Dans [32, 33], les σ sont supposés C^1 par morceaux. Les auteurs montrent alors que (53) a lieu. Des exemples de calibrations sont ensuite données, par exemple, on peut construire un minimiseur u de F (avec conditions de Dirichlet) dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ qui est constant par morceaux et dont S_u est formé de trois segments issus de 0, joignant le bord du disque et formant entre eux des angles de 120°. D'autres exemples d'applications sont donnés dans [86, 130, 131]. Plus récemment, A. Bonnet et G. David [57] ont montré que la fonction $\sqrt{r}\sin\theta/2$, $\theta\in(-\pi,\pi)$, $r\in(0,1)$ (le "cracktip") est minimiseur (pour sa propre condition de Dirichlet) de la fonctionnelle dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ (avec un poids $\pi/2$ devant le terme de longueur). Il serait très joli de trouver une calibration pour cette fonction, malheureusement, il n'est pas clair du tout que cette calibration existe.

Considérons une fonction $v\in BV(\Omega\times\mathbb{R};[0,1])$, décroissante en t, valant 0 pour $t\geq M$, 1 pour $t\leq -M$, avec M grand. Cette fonction est dans l'enveloppe convexe des $\mathbf{1}_u$ lorsque u parcourt $L^1(\Omega)$. On peut définir pour v la fonctionnelle convexe

$$G(v) \;:=\; \sup_{\sigma\in K}\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \sigma(x,t)\cdot Dv(x,t) \tag{55}$$

(on suppose les σ continus). Ce que montrent Alberti, Bouchitté et Dal Maso, c'est que $G(\mathbf{1}_u) = F(u)$ pour tout u. Une question qu'on peut se poser est la suivante : G est-elle la plus grande fonctionnelle convexe avec cette propriété ? Ou, ce qui est un peu plus faible : est-ce que (pour des conditions de Dirichlet données) $\min_v G(v) = \min_u F(u)$? Ceci est une condition nécessaire pour avoir l'existence d'une calibration σ, en effet, on vérifie aisément qu'alors $\int\sigma\cdot Dv = F(u)$ pour tout v, d'où $G(v)\geq F(u) = G(\mathbf{1}_u)$. Cette question est traitée dans [8], dans le cas de la dimension $N=1$. Nous montrons que cette propriété est vraie pour la fonctionnelle de Mumford et Shah F, et pour des fonctionnelles semblables.

6.1 L'approche par convexification de [8]

Considérons une fonctionnelle $F : L^1(\Omega) \to [0,+\infty]$. On introduit une borne arbitraire M (grande) et on restreint F aux fonctions u, $-M \le u \le M$. On définit ensuite X comme l'ensemble des fonctions mesurables $v : \Omega \times [-M, M] \to \{0,1\}$ décroissantes en t, avec $v(x,-M) = 1$ et $v(x,M) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. (Un des nombreux moyens de donner un sens à ces traces est, par exemple, de considérer v définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$, avec $v \equiv 1$ sur $\Omega \times (-\infty, -M)$ et $v \equiv 0$ sur $\Omega \times (M, +\infty)$.) X coïncide avec l'ensemble des $\mathbf{1}_u$, $u \in L^1(\Omega; [-M; M])$. Le convexifié $\overline{X}$ de X est l'ensemble des $v : \Omega \times [-M, M] \to [0,1]$, décroissantes en t, avec les traces $v(x,-M) = 1$ et $v(x,M) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. On définit sur $\overline{X}$ la fonctionnelle $\mathcal{F}(v) = F(u)$ lorsque $v = \mathbf{1}_u$, $u \in L^1(\Omega; [-M; M])$, et $+\infty$ autrement. Alors, si $\overline{\mathcal{F}}$ est l'enveloppe convexe s.c.i. de $\mathcal{F}$, un premier résultat est que $\overline{F} : u \mapsto \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_u)$ est l'enveloppe s.c.i. de F (dans $L^1(\Omega; [-M; M])$). En particulier, si F est déjà s.c.i. (c'est le cas pour la fonctionnelle de Mumford et Shah), alors $F(u) = \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_u)$ pour tout u.

Ensuite, on vérifie que lorsque F est coercive dans BV ($F(u) \ge c|Du|(\Omega) - c'$ pour tout u), alors $\overline{\mathcal{F}}$ est coercive dans $BV(\Omega \times [-M, M])$. On montre alors que $\overline{\mathcal{F}}$ a la représentation suivante, pour tout $v \in \overline{X} \cap BV(\Omega \times [-M, M])$

$$\overline{\mathcal{F}}(v) \;=\; \sup_{\sigma \in K} \int_{\Omega \times [-M,M]} \sigma(x,t) \cdot Dv(x,t)$$

où le convexe K est donné par

$$K \;=\; \left\{ \sigma \in C_0(\Omega \times [-M, M]; \mathbb{R}^{N+1}) \;:\; \int_{\Omega \times [-M,M]} \sigma(x,t) \cdot D\mathbf{1}_u(x,t) \;\le\; F(u) \right\}. \qquad (56)$$

Ici, $C_0(\Omega \times [-M, M]; \mathbb{R}^{N+1})$ est l'espace des champs $(N+1)$–dimensionnels continus sur $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, et nuls sur $\partial\Omega \times [-M, M]$. Les fonctions $v \in BV(\Omega \times [-M, M])$ ont toujours pour trace 1 en $-M$ et 0 en M, ce qui signifie que la mesure Dv est donnée par $Dv \;=\; (D_x v, D_t v)$, où

$$\begin{aligned} D_t v \;=\; & v(x, M-0)\, d\mathcal{H}^N \llcorner \Omega \times \{M\} - \\ & (1 - v(x, -M+0))\, d\mathcal{H}^N \llcorner \Omega \times \{-M\} \;+\; D_t v \llcorner \Omega \times (-M, M) \;\le\; 0\,. \end{aligned}$$

(On a noté respectivement $v(x, -M+0)$) et $v(x, M-0)$ les traces de $v|_{\Omega \times (-M,M)}$ en $t = -M$ et $t = +M$.)

Si F est la fonctionnelle de Mumford et Shah, on obtient bien la représentation (53), de plus, la fonctionnelle convexe G donnée par (55) n'est rien d'autre que $\overline{\mathcal{F}}$, et, par construction, son minimum ne peut être strictement en dessous de l'infimum de F (G étant obtenue par convexification). Malheureusement, l'ensemble K donné par (56) est strictement plus gros que l'ensemble K' des champs satisfaisant (54). On vérifie assez facilement que K ne peut être défini par des propriétés locales (en x). En effet, si $\sigma \in K'$ et $\operatorname{div} \sigma_0 = 0$, $\int_\Omega \sigma_0^t(x,0)\,dx = 0$, alors $\sigma + \sigma_0 \in K$. On est donc ramené au problème suivant : quel est le “plus petit” convexe $K' \subset K$

pour lequel on a encore

$$\overline{\mathcal{F}}(v) \ = \ \sup_{\sigma\in K'} \int_{\Omega\times[-M,M]} \sigma(x,t)\cdot Dv(x,t) \ ?$$

(En particulier, peut-on trouver un tel K' défini par des propriétés locales ?)

En dimension un, lorsque

$$F(u) \ = \ \int_0^1 u'(x)^2\,dx \ + \ \mathcal{H}^0(S_u)$$

et K' est le convexe de $C_0((0,1)\times[-M,M];\mathbb{R}^2)$ défini par (54), alors on montre [8, Thm. 8] que cette propriété est vraie. Notons que cette propriété est équivalente à $K = \overline{K'+N}$ où N est l'ensemble des champs σ à divergence nulle et tels que $\int_\Omega \sigma^t(x,0)\,dx = 0$. Le résultat de [8] est un peu plus général, on peut considérer des fonctionnelles de la forme (pour $u\in SBV(0,1)$) $F(u) = \int_0^1 f(x,u,u')\,dx + \sum_{x\in S_u} g(x,u(x-0),u(x+0))$, avec des conditions sur f et g assurant la coercivité de F dans $BV(0,1)$, et des conditions de régularité.

6.2 L'existence d'une calibration

Dans un travail en préparation, en collaboration avec G. Bouchitté [19], nous tentons de généraliser cette approche. D'un côté, nous étudions en détail le cas un peu plus simple des fonctionnelles de type $\int f(x,u,\nabla u)$, cette fois en dimension quelconque. D'un autre côté, en dimension un, nous avons remarqué que la preuve de [8, Thm. 8] est basée essentiellement sur la construction d'une fonction distance appropriée, liée à la fonctionnelle F, et sur l'étude de ses géodésiques. Cette observation nous a permis de comprendre comment, dans de nombreux cas, construire une calibration pour les minimiseurs d'une fonctionnelle F donnée. Pour conclure cette section nous explicitons brièvement cette construction dans le cas où F est la fonctionnelle de Mumford et Shah :

$$F(u) \ = \ \int_0^1 u'(x)^2\,dx \ + \ \mathcal{H}^0(S_u) \ + \ \int_0^1 (u(x)-g(x))^2\,dx\,,$$

avec $g\in BV(0,1)$. On se place dans $\Omega\times[-M,M]$, où M est tel que $\|g\|_\infty < M$. Dans ce cas, le convexe K' de [8] est l'ensemble des champs continus (nuls en $x=0,1$) vérifiant $\sigma^t(x,t)\geq \sigma^x(x,t)^2/4-(t-g(x))^2$ et $\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma^x(x,s)\,ds\right|\leq 1$ pour tous les $x\in(0,1)$ et $t,t_1,t_2\in(-M,M)$.

On va montrer qu'on est capable de construire une calibration pour ce problème, c'est-à-dire un champ σ vérifiant ces propriétés, et à divergence nulle. A un détail près, σ, bien loin d'être continu, ne sera que dans $L^\infty((0,1)\times(-M,M))$. Pour autant, un tel σ va caractériser complètement les minimiseurs de F.

Pour tout $(x,t)\in(0,1)\times[-M,M]$, posons

$$\Lambda^+(x,t) \ = \ \min\{F(u,(0,x])\ :\ u\in SBV(0,1)\,,\ u(x+0)=t\}\,.$$

Ici, $u(x+0)$ est la limite à droite de u, et $F(u,I)=\int_I {u'}^2+(u-g)^2\,dx\,+\,\mathcal{H}^0(S_u\cap I)$. De même, on pose

$$\Lambda^-(x,t) \ = \ \min\{F(u,[x,1))\ :\ u\in SBV(0,1)\,,\ u(x-0)=t\}\,.$$

On prolonge Λ^+ par continuité en posant $\Lambda^+(0,t)=0$ pour tout t, de même, on pose $\Lambda^-(1,t)=0$. On pose $m=\min_u F$, on vérifie que $0\le\Lambda^\pm(x,t)\le m+1$, et $\Lambda^+(x,t)+\Lambda^-(x,t)\ge m$ pour tout $(x,t)\in(0,1)\times[-M,M]$.

Lemme 6.1 *Λ^+ et Λ^- sont Lipschitziennes. De plus, $\partial_t\Lambda^+(x,t)\to 0$ quand $x\to 0$, uniformément en $t\in[-M,M]$, de même, $\partial_t\Lambda^-(x,t)\to 0$ quand $x\to 1$.*

Démonstration. On ne montre que les propriétés relatives à Λ^+. Soit $(x,t)\in(0,1)\times[-M,M]$ et h petit. Soit u_h un minimiseur du problème définissant $\Lambda^+(x,t+h)$ et u un minimiseur du problème définissant $\Lambda^+(x,t)$. On a

$$F(u_h+h,(0,x])\;-\;F(u_h,(0,x])\;\le\;\Lambda^+(x,t+h)\;-\;\Lambda^+(x,t)\;\le\;F(u+h,(0,x])\;-\;F(u,(0,x])\,.$$

Or, par exemple, $F(u+h,(0,x])-F(u,(0,x])=2h\int_0^x(u-g+h/2)\,dx$. On déduit facilement que $|\Lambda^+(x,t+h)-\Lambda^+(x,t)|\le 4M|h|$ pour h assez petit. Egalement, $|\partial_t\Lambda^+(x,t)|\le 4Mx$, ce qui montre la convergence vers zéro de cette dérivée lorsque $x\to 0$. Remarquons qu'on peut calculer la valeur de la dérivée $\partial_t\Lambda^+(x,t)$, qui quand elle existe (soit presque partout) est égale à $2\int_0^x(u-g)=2u'(x)$, où u est telle que $\Lambda^+(x,t)=F(u,(0,x])$.

Supposons $h>0$, et notons maintenant u_h la fonction qui définit $\Lambda^+(x+h,t)$. On a à présent

$$\begin{aligned}F(u_h,(0,x+h])\;-\;F(u_h(\,\cdot+h),(0,x])\;\le\;\Lambda^+(x+h,t)\;-\;\Lambda^+(x,t)&\\ \le\;F(u(\,\cdot-h),(0,x+h])\;-\;F(u,(0,x])\,.&\end{aligned}$$

La fonction $u(s)$ a été prolongée par $u(0)$ pour $s\le 0$. D'où

$$\begin{aligned}\int_h^{x+h}(u_h(s)-g(s))^2-(u_h(s)-g(s-h))^2\,ds\;\le\;\Lambda^+(x+h,t)\;-\;\Lambda^+(x,t)&\\ \le\;\int_0^h(u(0)-g(s))^2\,ds\;+\;\int_0^x(u(s)-g(s+h))^2-(u(s)-g(s))^2\,ds\,,&\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}2h\int_h^{x+h}\frac{g(s-h)-g(s)}{h}\left(u_h(s)-\frac{g(s-h)+g(s)}{2}\right)ds\;\le\;\Lambda^+(x+h,t)\;-\;\Lambda^+(x,t)&\\ \le\;h\left(\frac{1}{h}\int_0^h(u(0)-g(s))^2\,ds\;+\;2\int_0^x\frac{g(s)-g(s+h)}{h}\left(u(s)-\frac{g(s)+g(s+h)}{2}\right)ds\right)\,.&\end{aligned}$$

On en déduit que $|\Lambda^+(x+h,t)-\Lambda^+(x,t)|\le 4M(M+|Dg|(0,1))h$, et Λ^+ est bien Lipschitzienne.
□

Lemme 6.2 *Pour tout $a<b\in(0,1)$ et $u\in SBV((0,1);[-M,M])$, on a*

$$F(u,(a,b))\;\ge\;\pm(\Lambda^\pm(b,u(b-0))\;-\;\Lambda^\pm(a,u(a+0)))\,.$$

Démonstration. Soit $\tilde u\in SBV(0,1)$ une fonction définissant $\Lambda^+(a,u(a+0))$, c'est-à-dire telle que $\tilde u(a+0)=u(a+0)$ et $\Lambda^+(a,u(a+0))=F(\tilde u,(0,a])$. On modifie $\tilde u$ en posant $\tilde u=u$ sur (a,b),

$\tilde{u} = u(b-0)$ sur $(b,1)$, on voit que $\tilde{u}$ est continue en b. Par définition,

$$\begin{aligned}\Lambda^+(b,u(b-0)) \;\le\; F(\tilde{u},(0,b]) \;=\; F(\tilde{u},(0,b))\\ \;=\; F(\tilde{u},(0,a]) \;+\; F(\tilde{u},(a,b)) \;=\; \Lambda^+(a,u(a+0)) \;+\; F(\tilde{u},(a,b))\,.\end{aligned}$$

La preuve pour Λ^- est identique. □

Posons à présent pour tout x,t, $\Lambda(x,t) = (1-x)\Lambda^+(x,t) + x(m-\Lambda^-)(x,t)$. Λ est encore Lipschitzienne, vaut 0 en $x=0$, m en $x=1$, par ailleurs, $\partial_t\Lambda(x,t) \to 0$ quand $x \to 0$ ou 1, uniformément en $t \in [-M,M]$. On a encore, pour tout $a < b \in (0,1)$, $u \in SBV((0,1);[-M,M])$, $F(u,(a,b)) \ge \Lambda(b,u(b-0)) - \Lambda(a,u(a+0))$. En effet,

$$\begin{aligned}&\Lambda(b,u(b-0)) \;-\; \Lambda(a,u(a+0))\\ &= (1-b)\Lambda^+(b,u(b-0)) + b(m-\Lambda^-(b,u(b-0))) - (1-a)\Lambda^+(a,u(a+0)) - a(m-\Lambda^-(a,u(a+0)))\\ &= (1-a)(\Lambda^+(b,u(b-0)) \;-\; \Lambda^+(a,u(a+0))) \;+\; a(\Lambda^-(a,u(a+0)) \;-\; \Lambda^-(b,u(b-0)))\\ &\qquad + (b-a)(m-\Lambda^-(b,u(b-0)) - \Lambda^+(b,u(b-0))).\end{aligned}$$

On conclut grâce au Lemme 6.2 et à l'inégalité $\Lambda^- + \Lambda^+ \ge m$. Remarquons que si $a=0$ ou $b=1$, l'inégalité reste vraie, par continuité.

On définit maintenant $\sigma \in L^\infty((0,1)\times(-M,M))$ en posant $\sigma = (\partial_t\Lambda, -\partial_x\Lambda)$ (qui est bien défini presque partout). On a, bien sûr, $\operatorname{div}\sigma = 0$. Par ailleurs, si $0 \le a < b \le 1$, $u \in SBV((0,1);[-M,M])$, le flux $\int_{(a,b)\times[-M,M]} \sigma\cdot D\mathbf{1}_u$ est défini de façon non univoque et est donné par la différence $\Lambda(b,u(b-0)) \;-\; \Lambda(a,u(a+0))$. On a donc toujours

$$\int_{(a,b)\times[-M,M]} \sigma(x,t)\cdot D\mathbf{1}_u(x,t) \;\le\; F(u,(a,b))\,.$$

On en déduit facilement que $\sigma^t(x,t) \ge |\sigma^x(x,t)|^2/4 - (t-g(x))^2$ presque partout, de même, $\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma_x(x,s)\,ds\right| \le 1$ pour tout x, t_1, t_2 (à nouveau, il s'agit d'un flux qui est correctement défini, comme étant égal à la différence $\Lambda(x,t_2) - \Lambda(x,t_1)$). Le fait que $\partial_x\Lambda$ s'annule en $x=0$ et $x=1$ entraîne que le flux de σ à travers le bord $\{0,1\}\times[-M,M]$ est nul (par conséquent, le flux à travers n'importe quel sous-graphe est constant, égal à m). On a bien construit une calibration pour le problème, puisque si u_0 est un minimiseur de F, $m = F(u_0) = \int_{(0,1)\times[-M,M]}\sigma\cdot D\mathbf{1}_{u_0}$, tandis que $F(u) \ge \int_{(0,1)\times[-M,M]}\sigma\cdot D\mathbf{1}_u$ pour tout autre u.

A Les fonctions spéciales à variation bornée

On rappelle ici la définition des espaces $(G)BV$, $(G)SBV$. Pour un exposé détaillé, voir [101, 114, 156, 100, 44]. Pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, on définit en général

$$BV(\Omega) \;=\; \left\{u \in L^1(\Omega)\;:\;\sup\left\{\int_\Omega u\operatorname{div}\phi\;:\;\phi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N),\;|\phi(x)| \le 1\;\forall\,x\in\Omega\right\} < +\infty\right\}$$

La valeur du "sup" dans la définition est la "*variation totale de u*", notée $|Du|(\Omega)$. La raison de cette notation est qu'une fonction $u \in L^1(\Omega)$ est dans $BV(\Omega)$ si et seulement si sa dérivée distributionnelle Du est une mesure de Radon bornée, auquel cas le "sup" ci dessus est exactement la variation $|Du|(\Omega)$ de la mesure Du. Muni de la norme $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + |Du|(\Omega)$, $BV(\Omega)$ est un espace de Banach.

On définit aussi $GBV(\Omega)$ comme l'espace des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ telles que les tronquées $-k \vee u \wedge k$ sont dans BV pour tout entier positif k.

Pour $u \in BV(\Omega)$, on définit en tout point $x \in \Omega$ les limites approximatives supérieure $u_+(x)$ et inférieure $u_-(x)$ de u :

$$u_+(x) \;=\; \inf\left\{ t \in [-\infty, +\infty] \,:\, \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{|\{u > t\} \cap B_\rho(x)|}{\rho^N} = 0 \right\}$$

(l'infimum des t pour lesquels l'ensemble $\{u > t\}$ a densité zéro au point x) ; $u_-(x) = -(-u)_+(x)$. Lorsque $-\infty < u_-(x) = u_+(x) < +\infty$, on dit que u est approximativement continue au point x et on définit u par la valeur commune $u_+ = u_-$. En particulier, c'est le cas lorsque x est un point de Lebesgue de u (la réciproque n'est vraie que si u est bornée).

On définit un ensemble des sauts S_u, comme le complémentaire des points de Lebesgue. On peut vérifier que $\mathcal{H}^{N-1}$–p.p. dans S_u, $u_- < u_+$. S_u est un ensemble $(\mathcal{H}^{N-1}, N-1)$–rectifiable ($\mathcal{H}^{N-1}$–presque entièrement contenu dans une union dénombrable d'hypersurfaces C^1) et qui admet donc $\mathcal{H}^{N-1}$–p.p. un vecteur normal $\nu_u(x)$. On montre alors que Du se décompose en la somme de trois mesures :

- une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, notée $\nabla u(x)\,dx$ (lorsque $u \in W^{1,1}(\Omega)$, ∇u est alors le gradient au sens classique de u) ;
- une partie portée par la discontinuité S_u, qui s'écrit précisément
$$(u_+(x) - u_-(x))\nu_u(x)\,d\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u\,;$$
- une partie intermédiaire "Cantorienne" Cu, qui est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue et nulle sur tout ensemble de mesure $\mathcal{H}^{N-1}$ finie.

On écrit donc, pour $u \in BV(\Omega)$ (ou, en fait, GBV) :

$$Du \;=\; \nabla u(x)\,dx \;+\; Cu \;+\; (u_+(x) - u_-(x))\nu_u(x)\,d\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u\,.$$

L'espace $SBV(\Omega)$ est alors défini comme le sous-ensemble de $BV(\Omega)$ formé des u telles que $Cu = 0$. Les fonctions de SBV sont donc telles que Du est formée d'une partie absolument continue et d'un terme de saut. $GSBV(\Omega)$ est défini de la même façon que GBV.

L'espace SBV est décrit en détail dans [44]. Le théorème fondamental de compacité suivant est dû à Ambrosio :

Théorème A.1 (Ambrosio) *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $SBV(\Omega)$ telles que*

$$\sup_n \|u_n\|_\infty \;+\; \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_n}) \;+\; \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^p\,dx \;<\; +\infty,$$

où $p > 1$ est un réel fixé. Alors il existe une sous-suite (u_{n_k}) et $u \in SBV(\Omega)$ tels que, quand $k \to \infty$, $u_{n_k}(x) \to u(x)$ presque partout dans Ω, $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_u) \;\leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_n}).$$

Cette version est la plus simple du théorème (montrée dans [40]), d'autres versions que nous utilisons également ne requièrent qu'une borne de type L^p, $p \geq 1$, sur les fonctions u_n, la compacité a alors lieu dans $GSBV(\Omega)$ [37, 38].

B La Γ–convergence

Nous rappelons ici sommairement la définition de la Γ–convergence dans un espace métrisable. Pour la définition générale et un exposé complet nous renvoyons à [84, 49].

Etant donné un espace métrique (X, d) et $F_k : X \to [-\infty, +\infty]$ une suite de fonctions, on définit pour tout $u \in X$ la Γ–*lim inf* de F en u par

$$F'(u) = \Gamma - \liminf_{k\to\infty} F_k(u) = \inf_{u_k \to u} \liminf_{k\to\infty} F_k(u_k)$$

et la Γ–*lim sup* par

$$F''(u) = \Gamma - \limsup_{k\to\infty} F_k(u) = \inf_{u_k \to u} \limsup_{k\to\infty} F_k(u_k)\,.$$

On dit alors que F_k Γ–converge vers $F : X \to [-\infty, +\infty]$ lorsque $F' = F'' = F$. F', F'', et F (quand elle existe) sont s.c.i. sur X. On a les propriétés suivantes :

1. *F_k Γ–converge vers F si et seulement si pour tout $u \in X$,*

(i) pour toute suite u_k qui tend vers u, $F(u) \leq \liminf_{k\to\infty} F_k(u_k)$;

(ii) il existe une suite u_k tendant vers u et telle que $\limsup_{k\to\infty} F_k(u_k) \leq F(u)$.

2. *Si $G : X \to \mathbb{R}$ est continue et F_k Γ–converge vers F, alors $F_k + G$ Γ–converge vers $F + G$.*

La propriété suivante, facile à établir, illustre l'intérêt de cette notion de convergence variationnelle :

Soit $(F_k)_{k\geq 1}$, F telles que F_k Γ–converge vers F. Pour tout k soit u_k qui minimise F_k sur X. Alors, si la suite (ou une sous-suite de) $(u_k)_{k\geq 1}$ tend vers $u \in X$, u est un minimiseur de F, et $F_k(u_k)$ converge vers $F(u)$.

Lorsque $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de fonctionnelles sur X indexée par un petit paramètre continu ε qui tend vers zéro, on dit que F_ε Γ–converge vers F lorsque $\varepsilon \to 0$ si et seulement si pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ avec $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, F_{ε_k} Γ–converge vers F.

Références

[Articles parus ou à paraître dans des revues à comité de lecture]

[1] E. Bonnetier and A. Chambolle, *Computing the equilibrium configuration of epitaxially strained crystalline films*, SIAM J. Appl. Math. **62** (2002), no. 4, 1093–1121 (electronic).

[2] B. Bourdin and A. Chambolle, *Implementation of an adaptive finite-element approximation of the Mumford-Shah functional*, Numer. Math. **85** (2000), no. 4, 609–646.

[3] ———, *Design-dependent loads in topology optimization*, ESAIM : COCV (2002), to appear.

[4] A. Chambolle, *Un théorème de Γ-convergence pour la segmentation des signaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 3, 191–196.

[5] ———, *A uniqueness result in the theory of stereo vision : coupling shape from shading and binocular information allows unambiguous depth reconstruction*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **11** (1994), no. 1, 1–16.

[6] ———, *Image segmentation by variational methods : Mumford and Shah functional and the discrete approximations*, SIAM J. Appl. Math. **55** (1995), no. 3, 827–863.

[7] ———, *Finite-differences discretizations of the Mumford-Shah functional*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), no. 2, 261–288.

[8] ———, *Convex representation for lower semicontinuous envelopes of functionals in L^1*, J. Convex Anal. **8** (2001), no. 1, 149–170.

[9] ———, *A density result in two-dimensional linearized elasticity and applications*, Arch. Ration. Mech. Anal. (2002), to appear.

[10] A. Chambolle and G. Dal Maso, *Discrete approximation of the Mumford-Shah functional in dimension two*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), no. 4, 651–672.

[11] A. Chambolle, R. A. DeVore, N.-y. Lee, and B. J. Lucier, *Nonlinear wavelet image processing : variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage*, IEEE Trans. Image Process. **7** (1998), no. 3, 319–335.

[12] A. Chambolle and F. Doveri, *Continuity of Neumann linear elliptic problems on varying two-dimensional bounded open sets*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), no. 5-6, 811–840.

[13] ———, *Minimizing movements of the Mumford and Shah energy*, Discrete Contin. Dynam. Systems **3** (1997), no. 2, 153–174.

[14] A. Chambolle and C. J. Larsen, *C^∞–regularity of the free boundary for a two–dimensional optimal compliance problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations, to appear.

[15] A. Chambolle and P.-L. Lions, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numer. Math. **76** (1997), no. 2, 167–188.

[16] A. Chambolle and B. J. Lucier, *Un principe du maximum pour des opérateurs monotones*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 7, 823–827.

[17] ———, *Interpreting translation-invariant wavelet shrinkage as a new image smoothing scale space*, IEEE Trans. Image Process. **10** (2001), no. 7, 993–1000.

[18] A. Chambolle and F. Santosa, *Control of the wave equation by time-dependent coefficient*, ESAIM : COCV **8** (2002), 375–392, Special Volume : A tribute to J. L. Lions.

[**Preprints/Travaux en préparation**]

[19] G. Bouchitté and A. Chambolle, *A duality approach for nonconvex variational problems*, en préparation.

[20] A. Chambolle, *An algorithm for total variation minimization and applications*, soumis (actes de la conférence MIA2002, Paris), 2002.

[21] ———, *An algorithm for mean curvature motion*, en préparation.

[22] A. Chambolle, B. Desjardins, M.-J. Esteban, and C. Grandmont, *Existence of weak solutions for an unsteady fluid–plate interaction problem*, preprint CEREMADE, 2002.

[**Proceedings**]

[23] A. Chambolle, *Segmentation "optimale" de signaux*, Colloque "Modélisation mathématique pour le traitement d'images", INRIA, Rocquencourt, France" *(non publié)*, 16-18 mars 1992.

[24] ———, *Dualité Mumford–Shah / Canny–Deriche et segmentation progressive d'images*, 14e colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Juan-les-Pins, France, 1993, (Version anglaise dans in Proceedings of the IEEE Int. workshop on MultiDimensional Signal Processing, Cannes, 1993).

[25] ———, *Partial differential equations and image processing*, International Conference on Computer Vision, Austin, Texas, 1994.

[26] A. Chambolle, D. Geiger, and S. Mallat, *Un algorithme multi–échelle de mise en correspondance stéréo basé sur les champs Markoviens*, 13e Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, Juan-les-Pins, France, 1991, pp. 841–844.

[27] A. Chambolle and P.-L. Lions, *Image restoration by constrained total variation minimization and variants*, Investigative and Trial Image Processing, San Diego, CA (SPIE vol. 2567), 1995, pp. 50–59.

[28] ———, *Restauration de données par minimisation de la variation totale : une approche au second ordre.*, 15e colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Juan-les-Pins, France, 1995.

[**Notes de cours**]

[29] A. Chambolle, *Mathematical problems in image processing*, ICTP Lecture Notes Series, vol. II, ICTP - The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 2000, ed. by C.E. Chidume (ICTP).

[Bibliographie générale]

[30] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[31] G. Alberti, *Variational models for phase transitions, an approach via Γ–convergence*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations (G. Buttazzo *et al.*, ed.), Springer–Verlag, 2000, pp. 95–114.

[32] G. Alberti, G. Bouchitté, and G. Dal Maso, *The calibration method for the Mumford-Shah functional*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **329** (1999), 249–254.

[33] ———, *The calibration method for the Mumford-Shah functional and free-discontinuity problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations (2002), (to appear - electronic version available at `www.link.springer.de`).

[34] R. Alicandro, M. Focardi, and M. S. Gelli, *Finite-difference approximation of energies in fracture mechanics*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 3, 671–709.

[35] G. Allaire, É. Bonnetier, G. A. Francfort, and F. Jouve, *Shape optimization by the homogenization method*, Numer. Math. **76** (1997), no. 1, 27–68.

[36] F. Almgren, J. E. Taylor, and L. Wang, *Curvature-driven flows : a variational approach*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), no. 2, 387–438.

[37] L. Ambrosio, *A compactness theorem for a new class of functions with bounded variation*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **3-B** (1989), 857–881.

[38] L. Ambrosio, *Existence theory for a new class of variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **111** (1990), no. 4, 291–322.

[39] ———, *Movimenti minimizzanti*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **19** (1995), 191–246.

[40] L. Ambrosio, *A new proof of the SBV compactness theorem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), no. 1, 127–137.

[41] L. Ambrosio and G. Buttazzo, *An optimal design problem with perimeter penalization*, Calc. Var. Partial Differential Equations **1** (1993), no. 1, 55–69.

[42] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Partial regularity of free discontinuity sets. II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24** (1997), no. 1, 39–62.

[43] ———, *Higher regularity of solutions of free discontinuity problems*, Differential Integral Equations **12** (1999), no. 4, 499–520.

[44] ———, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[45] L. Ambrosio and D. Pallara, *Partial regularity of free discontinuity sets. I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24** (1997), no. 1, 1–38.

[46] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli, *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), no. 8, 999–1036.

[47] ———, *On the approximation of free discontinuity problems*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), no. 1, 105–123.

[48] R. J. Asaro and W. A. Tiller, *Interface morphology development during stress corrosion cracking : Part i : via surface diffusion*, Metall. Trans. **3** (1972), 1789–1796.

[49] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Applicable Mathematics Series., Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA – London, 1984.

[50] G. Aubert, M. Barlaud, P. Charbonnier, and L. Blanc-Féraud, *Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging*, Tech. Report TR#94-01, I3S, CNRS URA 1376, Sophia-Antipolis, France, 1994.

[51] M. Beckers, *Topology optimization using a dual method with discrete variables*, Struct. Optim. **17** (1999), no. 1, 14–24.

[52] G. Bellettini and A. Coscia, *Discrete approximation of a free discontinuity problem*, Numer. Funct. Anal. Optim **15** (1994), 105–123.

[53] M. P. Bendsøe, *Optimization of structural topology, shape and material*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[54] A. Blake and A. Zisserman, *Visual reconstruction*, MIT Press, 1987.

[55] A. Bonnet, *Caractérisation des minima globaux de la fonctionnelle de Mumford-Shah en segmentation d'images*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), no. 8, 1121–1126.

[56] ———, *Sur la régularité des bords des minima de la fonctionnelle de Mumford-Shah*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), no. 9, 1275–1279.

[57] A. Bonnet and G. David, *Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer*, Astérisque (2001), no. 274, vi+259.

[58] E. Bonnetier, R. S. Falk, and M. A. Grinfeld, *Analysis of a one-dimensional varia-tional model of the equilibrium shape of a deformable crystal*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), no. 3, 573–591.

[59] H. Borouchaki and P. Laug, *Le mailleur adaptatif bidimensionnel bl2d : manuel d'utilisation et documentation*, Tech. Report RT-0185, INRIA, 1995, http ://www.inria.fr/rrrt/rt-0185.html.

[60] ———, *The bl2d mesh generator : Beginner's guide, user's and programmer's manual*, Tech. Report RT-0194, INRIA, 1996, http ://www.inria.fr/rrrt/rt-0194.html.

[61] G. Bouchitté, Convex Analysis, Lecture Notes, Summer school "Calculus of Variations", Scuola Normale Superiore di Pisa, Italy, September 1998.

[62] B. Bourdin, *Image segmentation with a finite element method*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), no. 2, 229–244.

[63] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo, *Numerical experiments in revisited brittle fracture*, J. Mech. Phys. Solids **48** (2000), no. 4, 797–826.

[64] A. Braides, *Gamma–convergence for beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, no. 22, Oxford University Press, October 2002.

[65] A. Braides and G. Dal Maso, *Non-local approximation of the Mumford-Shah functional*, Calc. Var. Partial Differential Equations **5** (1997), no. 4, 293–322.

[66] D. Bucur and G. Buttazzo, *Variational methods in some shape optimization problems*, 2002, Lecture Notes, Università di Pisa.

[67] D. Bucur, G. Buttazzo, and N. Varchon, *On the problem of optimal cutting*, to appear in SIAM J. Optim., 2001.

[68] D. Bucur and P. Trebeschi, *Shape optimization problems governed by nonlinear state equations*, preprint (see `http ://cvgmt.sns.it`), 1998.

[69] D. Bucur and N. Varchon, *Boundary variation for a Neumann problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 4, 807–821.

[70] ______, *A duality approach for the boundary variation of Neumann problems*, Tech. Report 14, Université de Franche-Comté, Besançon, France, 2000, to appear in SIAM J. Math. Analysis.

[71] ______, *Stabilité de la solution d'un problème de Neumann pour des variations de frontière*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 5, 371–374.

[72] D. Bucur and J.-P. Zolésio, *Continuité par rapport au domaine dans le problème de Neumann*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), no. 1, 57–60.

[73] ______, *Optimisation de forme sous contrainte capacitaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **318** (1994), no. 9, 795–800.

[74] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, *Free energy of a nonuniform system I - interfacial free energy*, J. Chem. Phys. **28** (1958), 258–267.

[75] J. L. Carter, *Dual methods for total variation–based image restoration*, Ph.D. thesis, University of California, L. A., 2001.

[76] T. F. Chan, G. H. Golub, and P. Mulet, *A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration*, ICAOS '96 (Paris, 1996), Springer, London, 1996, pp. 241–252.

[77] ______, *A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration*, SIAM J. Sci. Comput. **20** (1999), no. 6, 1964–1977 (electronic).

[78] T. F. Chan and P. Mulet, *On the convergence of the lagged diffusivity fixed point method in total variation image restoration*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), no. 2, 354–367 (electronic).

[79] B.-C. Chen and N. Kikuchi, *Topology optimization with design-dependent loads*, Finite Elem. Anal. Des. **37** (2001), 57–70.

[80] D. Chenais, *On the existence of a solution in a domain identification problem*, J. Math. Anal. Appl. **52** (1975), no. 2, 189–219.

[81] A. Cherkaev and R. V. Kohn (eds.), *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[82] C. H. Chiu and H. Gao, *Stress singularities along a cycloid rough surface*, Int. J. Solids Structures **30** (1993), no. 21, 2983–3012.

[83] ———, *Numerical simulation of diffusion controlled surface evolution*, Mat. Res. Soc. Symp. Proc. **317** (1994), 369–374.

[84] G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[85] G. Dal Maso, F. Ebobisse, and M. Ponsiglione, *A stability result for nonlinear Neumann problems under boundary variations*, preprint (see `http ://cvgmt.sns.it`), 2002.

[86] G. Dal Maso, M. G. Mora, and M. Morini, *Local calibrations for minimizers of the Mumford-Shah functional with rectilinear discontinuity sets*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), no. 2, 141–162.

[87] G. Dal Maso, J.-M. Morel, and S. Solimini, *A variational method in image segmentation : Existence and approximation results*, Acta Math. **168** (1992), 89–151.

[88] G. Dal Maso and R. Toader, *A model for the quasi-static growth of brittle fractures : existence and approximation results*, Arch. Ration. Mech. Anal. **162** (2002), no. 2, 101–135.

[89] G. David, *C^1-arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional*, SIAM J. Appl. Math. **56** (1996), no. 3, 783–888.

[90] ———, *Global minimizers of the Mumford-Shah functional*, Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA), Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 219–224.

[91] G. David and S. Semmes, *On a variational problem from image processing*, Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993), no. Special Issue, 1995, pp. 161–187.

[92] ———, *On the singular sets of minimizers of the Mumford-Shah functional*, J. Math. Pures Appl. (9) **75** (1996), no. 4, 299–342.

[93] E. De Giorgi and L. Ambrosio, *Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **82** (1988), no. 2, 199–210 (1989).

[94] E. De Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci, *Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set*, Arch. Rational Mech. Anal. **108** (1989), 195–218.

[95] R. A. DeVore and B. J. Lucier, *Fast wavelet techniques for near-optimal image processing*, IEEE Military Communications Conference Record, San Diego, October 11–14 1992, pp. 1129–1135.

[96] F. Dibos and E. Séré, *An approximation result for the minimizers of the Mumford-Shah functional*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) **11** (1997), no. 1, 149–162.

[97] D. C. Dobson and C. R. Vogel, *Convergence of an iterative method for total variation denoising.*, SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 5, 1779–1791.

[98] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*, Biometrika **81** (1994), no. 3, 425–455.

[99] F. Ebobisse and M. Ponsiglione, *Stability of some unilateral free-discontinuity problems in two-dimensional domains*, preprint (see `http ://cvgmt.sns.it`), 2002.

[100] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[101] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[102] S. Finzi-Vita and P. Perugia, *Some numerical experiments on the variational approach to image segmentation.*, Proc. of the Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature Motion (Palma de Mallorca), September 25-27 1995, pp. 233–240.

[103] I. Fonseca and N. Fusco, *Regularity results for anisotropic image segmentation models*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24** (1997), no. 3, 463–499.

[104] I. Fonseca and L. Tartar, *The gradient theory of phase transitions for systems with two potential wells*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), no. 1-2, 89–102.

[105] G. A. Francfort and C. J. Larsen, *Existence and convergence for quasi-static evolution in brittle fracture*, Tech. report, LPMTM, Université Paris–13, 2002.

[106] G. A. Francfort and J.-J. Marigo, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. Mech. Phys. Solids **46** (1998), no. 8, 1319–1342.

[107] H. Gao, *Some general properties of stress-driven surface evolution in a hetero-epitaxial thin film structure*, J. Mech. Phys. Solids **42** (1994), no. 5, 741–772.

[108] H. J. Gao and W. D. Nix, *Surface roughening of heteroepitaxial thin films*, Ann. Rev. Mater. Sci. **29** (1999), 173–209.

[109] D. Geiger and F. Girosi, *Parallel and deterministic algorithms for MRFs : surface reconstruction*, IEEE Trans. PAMI **PAMI-13** (1991), no. 5, 401–412.

[110] D. Geiger and A. Yuille, *A common framework for image segmentation*, Internat. J.Comp. Vision **6** (1991), no. 3, 227–243.

[111] D. Geman and G. Reynolds, *Constrained image restoration and the recovery of discontinuities*, IEEE Trans. PAMI **PAMI-3** (1992), no. 14, 367–383.

[112] S. Geman and D. Geman, *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images*, IEEE Trans. PAMI **PAMI-6** (1984), no. 6, 721–741.

[113] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of variations. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, The Lagrangian formalism.

[114] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[115] M. Gobbino, *Finite difference approximation of the Mumford–Shah functional*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 2, 197–228.

[116] M. A. Grinfeld, *Instability of the separation boundary between a non-hydrostatically stressed elastic body and a melt*, Soviet Physics Doklady **31** (1986), 831–834.

[117] ———, *Stress driven instabilities in crystals : mathematical models and physical manifestations*, J. Nonlinear Sci. **3** (1993), 35–83.

[118] J. E. Guyer and P. W. Voorhees, *Morphological stability of alloy thin films*, Phys. Rev. B **54** (1996), 11710–11724.

[119] R. B. Haber, C. S. Jog, and M. P. Bendsøe, *A new approach to variable-topology shape design using a constraint on the perimeter*, Struct. Optim. **11** (1996), 1–12.

[120] V. B. Hammer and N. Olhoff, *Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading*, Struct. Multidisc. Optim. **19** (2000), 85–92.

[121] A. Henrot, *Continuity with respect to the domain for the Laplacian : a survey*, Control Cybernet. **23** (1994), no. 3, 427–443, Shape design and optimization.

[122] K. Kassner and C. Misbah, *Non-linear evolution of a uniaxially stressed solid : a route to fracture ?*, Europhys. Lett. **28** (1994), 245–250.

[123] ———, *A phase-field approach for stress-induced instabilities*, Europhys. Lett. **46** (1999), 217–223.

[124] P. H. Leo, J. S. Lowengrub, and H. J. Jou, *A diffusive interface model for micro-structural evolution in elastically stressed solids*, Acta mater **46** (1998), no. 6, 2113–2130.

[125] P.-L. Lions, S. J. Osher, and L. Rudin, *Denoising and deblurring using constrained nonlinear partial differential equations*, Tech. report, Cognitech Inc., Santa Monica, CA, 1992.

[126] W. Liu, P. Neittaanmäki, and D. Tiba, *Sur les problèmes d'optimisation structurelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 1, 101–106.

[127] F. Maddalena and S. Solimini, *Lower semicontinuity properties of functionals with free discontinuities*, Arch. Ration. Mech. Anal. **159** (2001), no. 4, 273–294.

[128] L. Modica and S. Mortola, *Il limite nella* Γ*–convergenza di una famiglia di funzionali ellittici*, Boll. Un. Mat. Ital. A (5) **14** (1977), no. 3, 526–529.

[129] ———, *Un esempio di* Γ^-*–convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **14** (1977), no. 1, 285–299.

[130] M. G. Mora, *Local calibrations for minimizers of the Mumford-Shah functional with a triple junction*, Commun. Contemp. Math. **4** (2002), no. 2, 297–326.

[131] M. G. Mora and M. Morini, *Local calibrations for minimizers of the Mumford-Shah functional with a regular discontinuity set*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **18** (2001), no. 4, 403–436.

[132] J.-M. Morel and S. Solimini, *Variational methods in image segmentation*, Birkhäuser, Boston, 1995.

[133] *MSR bulletin*, April 1996.

[134] J. Muller and M. Grant, *Model of surface instabilities induced by stress*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 1736–1739.

[135] D. Mumford and J. Shah, *Boundary detection by minimizing functionals, I*, Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco, 1985, (also *Image Understanding*, 1988).

[136] ______, *Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 577–685.

[137] F. Murat and J. Simon, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Tech. Report 74015, Laboratoire d'Analyse Numérique (now Laboratoire Jacques-Louis Lions), Université de Paris-6, 1976, 222 pages.

[138] M. Negri, *The anisotropy introduced by the mesh in the finite element approximation of the Mumford-Shah functional*, Numer. Funct. Anal. Optim. **20** (1999), no. 9-10, 957–982.

[139] M. Negri and M. Paolini, *Numerical minimization of the Mumford-Shah functional*, Calcolo **38** (2001), no. 2, 67–84.

[140] S. J. Osher and F. Santosa, *Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints. I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum*, J. Comput. Phys. **171** (2001), no. 1, 272–288.

[141] J. Petersson, *Numerical instabilities in topology design computations*, Progress in industrial mathematics at ECMI 98 (Gothenburg), Teubner, Stuttgart, 1999, pp. 431–438.

[142] J. Petersson, *Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **171** (1999), no. 1-2, 123–140.

[143] J. Petersson, M. Beckers, and P. Duysinx, *Almost isotropic perimeteres in topology optimization : Theoretical and numerical aspects.*, Proceedings of the Third World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Amherst, NY, May 1999, (CD Proceedings).

[144] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal mappings*, Aspects of contemporary complex analysis (Proc. NATO Adv. Study Inst., Univ. Durham, Durham, 1979), Academic Press, London, 1980, pp. 313–331.

[145] L. Rudin, S. J. Osher, and E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D. **60** (1992), 259–268, [also in *Experimental Mathematics : Computational Issues in Nonlinear Science* (Proc. Los Alamo Conf. 1991)].

[146] J. A. Sethian and A. Wiegmann, *Structural boundary design via level set and immersed interface methods*, J. Comput. Phys. **163** (2000), no. 2, 489–528.

[147] O. Sigmund and J. Petersson, *Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima*, Struct. Optim. **16** (1998), no. 1, 68–75.

[148] B. J. Spencer, S. H. Davis, and P. W. Voorhees, *Morphological instability in epitaxially strained dislocation-free solid films : linear stability theory*, J. Appl. Phys. **73** (1993), 4955–4970.

[149] B. J. Spencer, S. H. Davis, and P. W. Vorhees, *Morphological instabilities in epitaxially strained dislocation-free solid films : linear stability theory*, J. Appl. Phys **73** (1993), no. 10, 4955–4969.

[150] B. J. Spencer and D. L. Meiron, *Nonlinear evolution of stress–driven morphological instability in a two-dimensional semi–infinite solid*, Acta metall. mater. **42** (1994), no. 11, 3629–3641.

[151] B. J. Spencer, P. W. Voorhees, and J. Tersoff, *Enhanced instability of strained alloy film due to compositional stresses*, Appl. Phys. Lett. **84** (2000), 2449–2452.

[152] V. Šverák, *On optimal shape design*, J. Math. Pures Appl. (9) **72** (1993), no. 6, 537–551.

[153] L. Vese and S. Osher, *Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing*, Tech. Report 02-19, UCLA C.A.M., 2002.

[154] C. R. Vogel and M. E. Oman, *Iterative methods for total variation denoising*, SIAM J. Sci. Comput **17** (1996), no. 1, 227–238, Special issue on iterative methods in numerical linear algebra (Breckenridge, CO, 1994).

[155] ———, *Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images.*, IEEE Trans. Image Process. **7** (1998), no. 6, 813–824.

[156] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, New York, 1989, Sobolev spaces and functions of bounded variation.