1 Espaces métriques

1. Soient A et B deux parties d'un espace métrique E ; comparer au sens de l'inclusion :

$$\bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} \qquad ; \qquad \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B}$$

   Même question en remplaçant les adhérences par des intérieurs ou par des frontières.
2. Soient deux espaces métriques E et F, $A \subset E$ et $B \subset F$. Déterminer la frontière de $A \times B$.
3. On identifie comme d'habitude $\mathbb{R}$ à la partie $\mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $[0,1]$ a un intérieur non vide relativement à $\mathbb{R}$, mais un intérieur vide relativement à $\mathbb{R}^2$.
4. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que le plus grand élément $\max(\bar{A})$ de l'adhérence de A existe, et est égal à $\sup A$ la borne supérieure de A.
5. Soit $f : E \to F$ une fonction continue entre deux espaces métriques E et F, et soit Γ le graphe de f. Montrer que Γ est une partie fermée de $E \times F$, et que $x \mapsto (x,f(x))$ est un homéomorphisme entre E et Γ.
6. Dans $\mathbb{R}$, déterminer l'adhérence des parties suivantes :

$$\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad ; \qquad \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \quad | \quad (n,p) \in (N^*)^2 \right\}$$

7. Soit $(E_n)_{\in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles non vides ; soit E leur produit cartésien : $E = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$. Pour tous éléments de E, $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ distincts, on pose : $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = 1/ \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid x_n \neq y_n\}$.
   (a) Démontrer l'inégalité : $d(x,y) \leq \max\{d(x,z),d(y,z)\}$ pour tous x,y et $z \in E$.
   (b) Montrer que (E,d) est un espace métrique (de tels espaces où la distance vérifie l'inégalité précédente sont dits ultramétriques), dans lequel tous les triangles sont isocèles.
   (c) Soient X un espace métrique et $f : X \to E$. Pour tout n, on désigne par $f_n : X \to E_n$ la n-ième composante de f. On munit chaque E_n de la distance discrète.
   Montrer que f est continue si et seulement si chaque f_n est continue.
8. Etudier la continuité et la continuité uniforme de $f : [0,1] \cap \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - x\sqrt{2}}$.

2 Espaces vectoriels normés

Dans tous ces exercices, E désigne un espace vectoriel normé.

1. Soient A et B deux parties de E. On pose : $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$. Montrer :
   (a) Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ un ouvert.
   (b) Donner un contre-exemple dans lequel A et B sont fermés, sans que $A + B$ le soit (chercher des parties A et B de $\mathbb{R}$ non bornées).
2. On suppose E non réduit à $\{O_E\}$. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes continus f et g de E vérifiant : $g \circ f - f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
   indication : sinon on aurait $\quad g \circ f^{n+1} - f^{n+1} \circ g = (n+1)f^n \quad$ pour tout n.
3. Soit E l'espace vectoriel des applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. Pour $f \in E$, on désigne par $k(f)$ le plus petit réel k tel que f est k-lipschitzienne, et on pose $N(f) = \|f\|_\infty + k(f)$.
   Montrer que N est une norme sur E non équivalente à $\|.\|_\infty$.
4. Soient E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, et g fixé dans E. On pose : $N_g(f) = \|fg\|_\infty$ pour tout $f \in E$.
   (a) Montrer que N_g est une norme si et seulement si $g^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.
   (b) Montrer que N_g est une norme équivalente à $\|.\|_\infty$ si et seulement si $g^{-1}(0)$ est vide.
5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ continues, muni de la norme $\|.\|_\infty$, et
   $$A = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)dx \geq 1\}$$
   (a) Montrer que A est une partie fermée de E.
   (b) Montrer : $\quad \forall f \in A \quad \|f\|_\infty > 1$.
   (c) Calculer la distance $d(0,A)$
6. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \max |a_k|$, ce qui fait de $\mathbb{C}[X]$ un espace vectoriel normé.
   Soit z_0 un nombre complexe fixé. L'application $\varphi : P \mapsto P(z_0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$. Etudier la continuité et calculer la norme éventuelle de φ.
7. Soit H un hyperplan de E. On sait qu'il existe une forme linéaire non nulle f de E tel que $H = \ker f$. D'après le cours, H est fermé si et seulement si f est continue. Lorsque H n'est pas fermé, montrer que H est partout dense dans E.
8. Soit f une forme linéaire continue sur E, et soit H son noyau, qui est donc un hyperplan de E. Soit $a \in E$. Montrer que :
   $$|f(a)| = \frac{d(a,H)}{\|f\|}$$
   indication : le cas où $a \in H$ est immédiat. Lorsque $a \notin H$, utiliser la décomposition : $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

3 Convexité

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ d'inconnue $x \in I$?
3. Soit A une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E. Montrer que $x \mapsto d(x,A)$ est une fonction convexe sur E.

Inégalités de Hölder et de Minkowski Soient deux réels p et q strictement supérieurs à 1, vérifiant $p + q = pq$, ce qui équivaut à $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

On fixe un entier non nul n. Soit $E = \mathcal{F}(\{1,\dots,n\},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\{1,\dots,n\}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous $\varphi \in E$ et $r \in [1, +\infty[$, on pose :

$$\|\varphi\|_r = (|\varphi(1)|^r + \cdots + |\varphi(n)|^r)^{1/r}$$

Enfin, on fixe deux fonctions non nulles f et $g \in E$ à valeurs positives, et on pose $F = \dfrac{1}{\|f\|_p} f$ et $G = \dfrac{1}{\|g\|_q} g$.

1. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que : $\alpha\beta \leq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$ pour tous réels positifs α et β.
2. En déduire que : $\|FG\|_1 \leq 1$, puis l'inégalité de Hölder : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q$
3. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que : $\|f+g\|_1 \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|(f+g)^{p-1}\|_q$
4. En déduire l'inégalité de Minkowski : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
5. En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur E.
6. E étant de dimension finie, les normes sont toutes équivalentes. Trouver les meilleures constantes réelles A et B telles que :
$$\forall \phi \in E \quad A\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_p \leq B\|\varphi\|_\infty$$

La Fonction Γ d'Euler On s'intéresse au problème suivant :

Déterminer les fonctions $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ convexes vérifiant : $g(1) = 0$ et l'équation fonctionnelle $g(x+1) - g(x) = \ln x$ pour tout $x > 0$.

On suppose pour l'instant qu'une solution g existe.

1. Soient n un entier ≥ 2 et $x \in]0,+\infty[$. En considérant les points du graphe de g d'abscisses respectives : $n-1$, n, $n+x$ et $n+1$, montrer l'inégalité :
$$x\ln(n-1) \leq g(x+n) - g(n) \leq x\ln n$$
2. En écrivant $\ln n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k}{k-1}$, et en utilisant l'équation fonctionnelle de g, montrer que l'inégalité précédente s'écrit :
$$x\sum_{k=2}^{n-1} \ln\frac{k}{k-1} \leq g(x) + \ln x + \sum_{k=2}^{n} (\ln(x+k-1) - \ln(k-1)) \leq x\sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k}{k-1}$$
On pose alors pour tout $n \geq 2$:
$$u_n(x) = x\ln\frac{n}{n-1} - \ln(x+n-1) + \ln(n-1) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = -\ln x + \sum_{k=2}^{n} u_k(x)$$
3. Vérifier que l'inégalité précédente s'écrit : $g_n(x) - x\ln\dfrac{n}{n-1} \leq g(x) \leq g_n(x)$
4. En conclure que le problème posé a au plus une solution.
5. Vérifier pour tout $n \geq 2$ que g_n est convexe sur $]0, +\infty[$.
6. On admet que pour tout $x > 0$, la suite de terme général $g_n(x)$ converge (à justifier plus tard après avoir vu les séries). Soit $g(x)$ sa limite. Montrer que g est l'unique solution au problème.

   On pose alors pour tout $x > 0$: $\Gamma(x) = e^{g(x)} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\prod_{k=2}^{n} e^{u_k(x)}$

   Par exponentiation, le fait que g soit la solution du problème donne :

   $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ est l'unique fonction vérifiant : $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est convexe dans $]0, +\infty[$.
7. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. Montrer pour tout $x > 0$: $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^x.n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (formule de Gauss)

4 Compacité

1. Soient E un espace métrique, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E qui converge vers $l \in E$. Montrer que $\{l,u_0,u_1,\ldots\}$ est compact.
2. Soit X une partie d'un espace métrique. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent, chaque fois, la troisième :
   (a) X est compact ;
   (b) X est discret ;
   (c) X est fini.
3. Soit K un espace métrique compact. Montrer qu'il existe une suite (u_n) à valeurs dans K telle que $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{K}$.
   remarque : un espace métrique ayant cette propriété est dit **séparable**. Montrer que tout evn de dimension finie est séparable.
4. Soit A une partie d'un espace métrique E. Pour tout $r > 0$, on pose :
$$V_r(A) = \{x \in E \,|\, d(x,A) < r\}$$
   (a) Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert de E et que $\bar{A} \subset V_r(A)$.
   (b) Montrer que si A est compact, alors pour tout ouvert U de E tel que $A \subset U$, il existe $r > 0$ tel que $V_r(A) \subset U$.

Espaces localement compacts Un espace métrique X est dit **localement compact** lorsque tout élément de X a un voisinage compact (dans X).

1. Soient X un evn de dimension finie, U un ouvert de X et F un fermé de X. Montrer que $U \cap F$ est localement compact.
2. Soient X un espace métrique localement compact, K une partie compacte de X, et U un ouvert de X contenant K. Montrer qu'il existe un ouvert V de E tel que : $K \subset V \subset U$ et $\bar{V}$ est compact.
3. (lemme d'Urysohn) En reprenant les hypothèses et les notations de l'exercice précédent, soit F le complémentaire de V dans X. On pose :
$$g(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,K) + d(x,F)} \qquad \text{pour tout } x \in X$$
   (remarquer que le dénominateur ne s'annule pas). Montrer que g a les propriétés suivantes :
   g est continue sur X, $0 \le g \le 1$, $\forall x \in K \quad g(x) = 1$ et l'ensemble des $x \in X$ tels que $g(x) \neq 0$ est inclus dans un compact, et donc g est à support compact (voir le paragraphe suivant).

Support d'une fonction Soient X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction numérique. On appelle **support de** f le plus petit fermé de X en dehors duquel f est nulle : c'est l'adhérence de la partie : $\{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}$. On dit que f est une fonction **à support compact** lorsque son support est une partie compacte.

A partir de maintenant, on suppose que X est un espace métrique localement compact. On désigne par $B(X)$ l'espace de Banach des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ bornées sur X muni de la norme $\|f\| = \sup |f|$ de la convergence uniforme.

On désigne par $C_c(X)$ l'ensemble des fonctions $X \to \mathbb{R}$ continues à support compact.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f **s'annule à l'infini** lorsque :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ compact de } X \quad \forall x \in X \quad x \notin X \Rightarrow |f(x)| \le \varepsilon$$
On désigne par $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X qui s'annulent à l'infini.

Par les raisonnements habituels, $C_c(X)$ et $C_0(X)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. Vérifier que la fonction g du lemme d'Urysohn est bien à support compact.
2. Montrer les inclusions : $C_c(X) \subset C_0(X) \subset B(X)$; on peut donc également munir $C_c(X)$ et $C_0(X)$ de la norme de la convergence uniforme, ce qu'on fait à présent.
3. Montrer que $C_0(X)$ est un fermé de $B(X)$. Par conséquent, $C_0(X)$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme.
4. A l'aide du lemme d'Urysohn, démontrer que $C_c(X)$ a pour adhérence $C_0(X)$.
5. On prend la partie discrète $X = \mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$. Les fonctions f définies sur X sont identifiées aux suites $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifier que $\mathbb{N}$ est localement compact. Décrire les ensembles $C_c(\mathbb{N})$ et $C_0(\mathbb{N})$.

5 Espaces de Banach

1. Soient E un espace métrique complet, et $f : E \to E$ une application telle que l'une de ses itérées f^p ($p \in \mathbb{N}^*$) soit contractante. Montrer que f admet un point fixe unique.
2. Soient $f : E \to F$ une application linéaire entre deux evn E et F, et A un ouvert de E.On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $f(A)$ est un ouvert si et seulement si f est surjective.
3. Soient E un evn, F un espace de Banach, E_0 un sous-espace dense de E, et $f : E_0 \to F$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu $\tilde{f} : E \to F$ de u. Montrer que $\tilde{f}$ est linéaire et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.
4. Soit E un evn de dimension finie. Montrer que pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E converge dans $\mathcal{L}_c(E,E)$ il faut et il suffit que pour tout x de E la suite de terme général $u_n(x)$ converge dans E.
5. Soient E un evn de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que $\|u\| \leq 1$. Soit $F = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{Id}_E + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\right)$
   (a) En utilisant le théorème du rang, démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   (b) Démontrer que dans $\mathcal{L}_c(E,E)$, la suite de terme général v_n converge vers la projection sur F parallèlement à G.

Distance entre deux parties Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique E. On désigne par $d(A,B)$ (distance entre A et B) la borne inférieure des $d(a,b)$ lorsque $a \in A$ et $b \in B$:

$$d(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a,b) = \inf_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} d(a,b)\right) = \inf_{a\in A} d(a,B) \qquad \text{et de même} \qquad d(A,B) = \inf_{b\in B} d(b,A)$$

On dit que la distance entre A et B est **atteinte** lorsqu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $d(a,b) = d(A,B)$.

On rappelle que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne sur E.

1. Soient E un evn de dimension finie, $a \in E$ et F une partie non vide et fermée de E. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|b - a\| = d(a,F)$, autrement dit la distance entre a et F est atteinte.
2. (généralisation) Soient E un evn de dimension finie, A et B deux parties non vides de E, A compacte et B fermée. Montrer que la distance entre A et B est atteinte.
3. On suppose A fermée, B compacte et $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $d(A,B) > 0$. Montrer que ce résultat est faux même en dimension finie si on suppose seulement que B est fermée ; en particulier la distance entre deux fermés n'est pas nécessairement atteinte.

6 Séries dans un espace de Banach

1. (Critère spécial des séries alternées) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite de nombres réels positifs. On s'intéresse à la série dite **alternée** $\sum(-1)^n u_n$. Soit $S_n = u_0 - u_1 + \cdots + (-1)^n u_n$ la n-ième somme partielle de la série alternée. On suppose la suite u décroissante de limite nulle. Soit deux entiers n et p, avec $p \geq n$. Montrer que :
$$0 \leq (-1)^{n+1}(S_n - S_p) \leq u_{n+1}$$
En déduire que la série alternée converge vers une limite S, et que son reste $R_n = S - S_n$ vérifie : pour tout entier n, $\quad 0 \leq (-1)^{n+1} R_n \leq u_{n+1}$.
2. Soit l^∞ l'espace de Banach des suites à valeurs réelles et bornées, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Pour tout entier p, on posera : $e_p = (\delta_{np})_{n\in\mathbb{N}}$, où δ_{np} est le symbole de Kronecker.
Soit l_0^∞ l'ensemble des suites à valeurs réelles et de limite nulle.
   (a) Montrer que l_0^∞ est un sous-espace vectoriel fermé de l^∞.
   - On munit l_0^∞ de la norme $\|.\|_\infty$. l_0^∞ est donc un sous-espace de Banach de l^∞ d'après la question précédente.

   (b) Montrer que pour tout $x = (x_n) \in l_0^\infty$, la série $\sum x_n e_n$ est convergente, et de somme x. Est-elle normalement convergente ?
   (c) Soit f une forme linéaire continue sur l_0^∞ ; on pose $f(e_n) = u_n$. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$ et :
$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$
   (d) En déduire que le dual topologique $(l_0^\infty)' = \mathcal{L}_c(l_0^\infty,\mathbb{R})$ s'identifie à l'espace de Banach l^1 des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ soit absolument convergente muni de la norme L^1 :
$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$
   (e) Utilisant la même technique que ci-dessus, montrer que le dual de l^1 s'identifie à l^∞.

remarque : on peut montrer que tout evn E s'injecte canoniquement dans son bidual E''. Les evn pour lesquels cette injection est un isomorphisme sont dits **réflexifs**. Il est facile de montrer qu'un espace réflexif est un espace de Banach. L'exercice ci-dessus montre que l_0^∞ n'est pas un espace réflexif. C'est **le** contre-exemple classique (il n'y en a pas de plus simple).

Eléments inversibles d'une algèbre de Banach Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach à unité e, et soit G l'ensemble des éléments inversibles de A. D'après les résultats d'algèbre générale, G est un groupe pour la multiplication.

Le **spectre** d'un élément x de A est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $x - \lambda e$ n'est pas inversible. Ici le spectre de x sera noté $\sigma(x)$.

1. Soit $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$. On considère la série $S = \sum(-1)^n x^n$ à valeurs dans A.
Montrer que la série S est absolument convergente, $e + x \in G$ et
$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$
2. En déduire que G est un ouvert de A, et que l'application d'inversion : $g \mapsto g^{-1}$ définie sur G est continue en e.
3. Soit $x \in A$. Montrer que le spectre $\sigma(x)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$, et $|\lambda| \leq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(x)$.
4. (un exemple) Soit l^1 l'espace de Banach des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Soit $A = \mathcal{L}_c(l^1,l^1)$ l'algèbre de Banach endomorphismes continus de l'espace l^1. On pose
$$D\left[(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{pour tout } u \in l^1$$
D s'appelle l'opérateur de décallage. Vérifier que $D \in A$, calculer sa norme $\|D\|$ et son spectre $\sigma(D)$.
5. Soit $f : A \to \mathbb{C}$ un homomorphisme d'algèbres, autrement dit : f est linéaire, $f(e) = 1$, et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x et $y \in A$. Montrer que f est une forme linéaire continue, et $\|f\| = 1$.
Indication : aboutir à une contradiction s'il existe $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$ et $f(x) = -1$ en considérant $f\left((e+x)^{-1}\right)$.

7 Suites et séries de fonctions

1. Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.
   (a) En posant $a_{pn} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$, montrer que :
   $$u_n(z) = 1 + z + \sum_{p=2}^{n} a_{pn} \frac{z^p}{p!}$$
   (b) Etablir par récurrence l'inégalité : $\forall (b_1, \dots, b_k) \in [0,1]^k \quad (1 - b_1) \dots (1 - b_k) \geq 1 - (b_1 + \cdots + b_k)$; puis montrer que $0 \leq 1 - a_{pn} \leq \frac{p(p-1)}{2n}$ pour tous entiers $n \neq 0$ et $p \in [2,n]$.
   (c) En déduire que : $|e^z - u_n(z)| \leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p(p-1)}{2n} \left|\frac{z^p}{p!}\right| = \frac{|z|^2}{2n} e^{|z|}$
   (d) Montrer que la suite de fonction $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$.
2. (Théorème de Dini) Soit $a < b$, et $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{R}}$ une suite de fonctions continues. On suppose que $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ et que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue. Alors (f_n) converge uniformément vers f.
3. Soit $(P_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :
   $$P_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right)$$
   (a) Montrer pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, en procédant par récurrence et en mettant en évidence un facteur $k_n(x)$ tel que $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = k_n(x)(\sqrt{x} - P_n(x))$.
   (b) Montrer que pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$: $|\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{\ }$ sur $[0,1]$ par les deux méthodes suivantes :
      i. Directement en utilisant l'inégalité précédente et en faisant le découpage : $[0,1] = [0,\varepsilon^2] \cup [\varepsilon^2,1]$;
      ii. En utilisant le théorème de Dini(voir l'exercice précédent).
   (d) En remarquant que $|x| = \sqrt{x^2}$, en déduire qu'il existe une suite (f_n) de polynômes qui converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur le segment $[-1,1]$.
4. Soient un E un evn, F un espace de Banach, $f : E \to F$ une application continue telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
   $$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_F \leq M$$
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : E \to F$ définie par : $f_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ pour tout $x \in E$.
   Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers une application g linéaire et continue.
   Indication : une fois l'existence de g assurée, on montrera que g est $\mathbb{Q}$-linéaire, puis on utilisera le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la fonction g précédente est l'unique application linéaire continue de E vers F telle que $f - g$ soit bornée sur E

8 Séries entières

1. On suppose que la série entière $\sum a_n X^n$ a un rayon de convergence strictement positif. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} X^n$ a un rayon de convergence infini.
2. Soit $\sum a_n X^n$ une série entière telle que : $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}\right| = 2$. Calculer son rayon de convergence.
3. Soit A une partie mesurable de $[0,2\pi]$. Montrer que : $\lim_{n\to\infty} \int_A \cos(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin(nx)dx = 0$.
4. En remarquant que : $\frac{2n}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soient deux nombres complexes α et β tel que $\beta \neq 0$, et $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ une série entière, dont les coefficients sont donnés par les relations de récurrence double suivantes :

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$$

   On désigne par ρ son rayon de convergence.
   (a) Soit M un réel strictement positif tel que : $M^2 \leq |\alpha| M + |\beta|$. Montrer que $|a_n| = O(M^n)$.
   (b) En déduire que ρ est strictement positif.
   (c) Pour $|z| < \rho$, montrer que : $(1 - \alpha z - \beta z^2)A(z) = z$
   - Soient z_1 et z_2 les deux racines de $1 - \alpha X - \beta X^2 = 0$. On suppose que $z_1 \neq z_2$

   (d) Déterminer deux nombres complexes u_1 et u_2 tels que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2} = \frac{u_1}{1 - \frac{z}{z_1}} + \frac{u_2}{1 - \frac{z}{z_2}} \qquad \text{pour } |z| < \rho$$

   (e) En déduire une expression de a_n à l'aide de z_1 et z_2, et montrer que $\rho = \min\{|z_1|,|z_2|\}$.
6. Soit la suite de terme général u_n définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

   Calculer u_n en fonction de n.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière de rayon $R > 1$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 f(x)x^n dx = 0$$

   Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-R,R[$.

9 Espaces de Hilbert

1. (théorème des trois perpendiculaires) Soient p_1 et p_2 les projections orthogonales sur deux sous-espaces vectoriels fermés F_1 et F_2 d'un espace de Hilbert E. Montrer que les relations : $F_1 \subset F_2$ et $p_1 = p_1 \circ p_2$ sont équivalentes.
2. Soit E un espace de Hilbert réel, et soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties non vides, convexes et fermées de E, et emboîtées, c'est-à-dire : $C_{n+1} \subset C_n$ pour tout n. On pose $C = \cap C_n$ leur intersection, et $p_n = p_{C_n}$ la projection sur C_n pour tout entier n. L'objectif de l'exercice est d'établir le résultat suivant :

   Pour que C soit non vide, il faut et il suffit qu'il existe $a \in E$ tel que la suite de terme général $d(a,C_n)$ soit majorée. Pour tout $x \in E$, on a alors : $p_C(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$

   (a) Démontrer que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout n.
   (b) Commencer par traiter l'implication évidente.
   A partir de maintenant, on suppose qu'il existe $a \in E$ et un réel positif C tels que $d(a,C_n) \leq C$ pour tout n. Soit $x \in E$.
   (c) Montrer que la suite de terme général $d(x,C_n)$ est convergente.
   Soient d la limite de la suite précédente, et B la boule fermée de centre x et de rayon d. Pour tout entier n, soit $F_n = B \cap C_n$.
   (d) En utilisant l'égalité de la médiane, montrer que le diamètre de F_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et en déduire que l'intersection des F_n est un singleton.
   (e) Conclure.

3. Soient E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et $A : E \to E$ une application linéaire. On dit que A est un **opérateur hermitien** lorsqu'il vérifie :
$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad < Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$$
   On fixe un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, et on pose pour tout opérateur hermitien A :
$$\langle A\rangle = \langle x|Ax\rangle \qquad \text{et} \qquad \Delta A = \|Ax - \langle A\rangle x\|$$
   Dans toute la suite, on considère deux opérateurs hermitiens, A et B, et on pose : $A' = A - \langle A\rangle \mathrm{Id}_E$ et $[A,B] = AB - BA$.
   (a) Vérifier que $\langle A\rangle$ est réel, et A' et A'^2 sont des opérateurs hermitiens.
   (b) Montrer que $(\Delta A)^2 = \langle A'^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$
   (c) Montrer que $\Delta A = 0$ si et seulement si x est un vecteur propre de A.
   (d) Montrer que $i[A,B]$ est un opérateur hermitien et $[A',B'] = [A,B]$.
   (e) En déduire $\quad (\Delta A).(\Delta B) \geq \dfrac{1}{2}\langle i[A,B]\rangle$
   remarque : en mécanique quantique, cette inégalité conduit au principe d'incertitude d'Heisenberg.
4. Soit A un opérateur un opérateur hermitien continu d'un espace de Hilbert E (voir la définition de l'exercice précédent). On pose :
$$U = \exp(iA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \qquad \text{série normalemnt convergente dans } \mathcal{L}_c(E,E)$$
   Montrer que U est un **opérateur unitaire**, autrement dit : $\quad \forall (x,y) \in E^2 \quad \langle Ux|Uy\rangle = \langle x|y\rangle$
5. Soit E l'espace de Hilbert $(L^2(\mu),\|.\|)$, où μ est la mesure de Lebesgues sur $[-1,1]$, et $\|.\|$ est la norme L^2. Pour tout entier n, on pose :
$$L_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n \qquad \text{, et} \qquad P_n = \frac{1}{\|L_n\|} L_n \quad (n\text{-ième polynôme de Legendre})$$
   Vérifier que chaque P_n est un polynôme de degré n, et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que le famille $\mathcal{F} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée dans E.
   En admettant que l'ensemble des polynômes est dense dans E (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass), montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de l'espace de Hilbert E.
6. Soit E un espace de Hilbert admettant une base orthonormée dénombrable infinie $(e_n)_{n\geq 1}$. Soit C l'enveloppe fermée convexe fermée des points $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) e_n$ pour $n \geq 1$. Montrer qu'il n'existe aucun couple de points x,y de A dont la distance soit égale au diamètre de A.

10 Séries de Fourier

1. Soit f une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x(2\pi - x)$ pour tout $x \in]0,2\pi[$. Développer f en série de Fourier réelle. En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 et 2π-périodique telle que : $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)^2| dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)^2| dt$$

Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Développer en série de Fourier réelle la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par : $f(x) = \cos(\alpha x)$. En déduire :

   (a)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \quad \cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

   (b)

$$\forall x \in]-\pi,\pi[\quad \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

4. Déterminer les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ye^{it} = 0$$

Table des matières