TD LM115

Nombres réels

Cours

$A \subset \mathbb{R}$ admet une borne sup si A est non vide et majoré. Alors

$$\sup A = M \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \leq M, \\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M \end{array} \right.$$

$A \subset \mathbb{R}$ admet une borne inf si A est non vide et minoré. Alors

$$\inf A = m \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \geq m, \\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m \end{array} \right.$$

$(\forall x \in A,\ x \leq b) \Rightarrow \sup A \leq b.$ $\qquad$ $(\forall x \in A,\ x \geq b) \Rightarrow \inf A \geq b.$

$(\forall x \in A,\ x \leq b)$ et $b \in A \Rightarrow \sup A = b.$ $\qquad$ $(\forall x \in A,\ x \geq b)$ et $b \in A \Rightarrow \inf A = b.$

Exercice 1:
Que peut-on dire d'un nombre réel x tel que :

a) $\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq 4000\varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad -4\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \quad -4 + \varepsilon \leq x < \varepsilon$

Exercice 2:
Déterminer si elles existent (le justifier) les bornes inf et sup des ensembles suivants

$$A = [0,1], \quad B =]0,1[, \quad C = \{1 - 1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}, \quad D = \{\sqrt{2n} - \sqrt{n+2},\ n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathbb{Q}^{-*}.$$

Exercice 3:
Déterminer si elles existent (le justifier) les bornes inf et sup des deux ensembles suivants :

$$A = \{1/2^n + (-1)^n/n,\ n \in \mathbb{N}^*\},$$
$$B = \{ax + b\ ;\ x \in [-2,1[\}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels donnés.}$$

Exercice 4:
Soient A et B deux ensembles de $\mathbb{R}$ majorés. On note $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.

1) Montrer que $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

2) Montrer l'égalité $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5:
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et telles que : $\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x \leq y$.

a) Montrer l'existence de $\sup A$ et $\inf B$.

b) Montrer que $\sup A \leq \inf B$

c) Montrer l'équivalence sup$A$=inf$B \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in B \quad |x - y| < \varepsilon$.

d) Donner un exemple d'ensembles A et B satisfaisant c)

Exercice 6:
Soit f fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1) Déterminer l'ensemble des applications affines qui sont continues et qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = f(1)n$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(1/n) = f(1)/n$.

3) Monter que $\forall q \in \mathbb{Q},\ f(q) = f(1)q$.

4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = f(1)x$.

5) Déterminer l'ensemble E formé des fonctions continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

6) Soit f fonction continue non identiquement nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

a) Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}+$.

b) En déduire qu' il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = e^{\alpha x}$.

c) Déterminer l'ensemble F formé des fonctions continues non identiquement nulles f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

Exercice 7:
Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ avec $G \neq \{0\}$. Soit $a = \inf\{x \in G : x > 0\}$.

1) Montrer que si $a > 0$, alors $a \in G$ et $G = a\mathbb{Z}$.
(indication : montrer que $x \in G$ et $x > a \Rightarrow x \geq 2a$.)

2) Montrer que si $a = 0$ alors G dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'éléments de G.

3) Application. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha] = \{n + \alpha m : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\{e^{i2\pi\alpha m} : m \in \mathbb{Z}\}$ dense dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.