Devoir LM115

A rendre le vendredi 23 mars

Exercice 1:
Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2, alors

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}}{n} \qquad \text{converge vers } \; l_1 l_2.$$

Exercice 2:
Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
(on pourra utiliser $\ln(\frac{n+1}{n}) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ ou $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(\frac{x+1}{x})$)
2)Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma \in [1-\ln(2),1]$.

Exercice 3:
Soit $A \in \mathbb{R}$ et f focntion définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + A$.
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1) a) Donner le tableau de variation de f.

b) Donner le tableau de signe de $f(x) - x$ en distinguant les cas $A > 1/4$, $A = 1/4$ et $A < 1/4$.

c) On dit que l'intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$. Montrer que si I stable par f et $u_0 \in I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

2) Dans cette question, on suppose $A \geq 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

a) Montrer que si $A > 1/4$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞.

b) Montrer que si $A \in [0,1/4[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et donner sa limite (utiliser un intervalle stable par f).

3) On suppose dans cette question que $A \in]-1,0[$.

a) Montrer que $[A,0]$ est stable par f.

b) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers a tel que $f \circ f(a) = a$ et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers b tel que $f \circ f(b) = b$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) - x = (x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1)$.

Comment pouvait on deviner que $f \circ f(x) - x$ est factorisable par $f(x) - x = x^2 - x + A$?

d) Montrer que si $A \in]-3/4,0[$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

e) Montrer que si $A \in]-1,-3/4[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.