École Polytechnique **Promotion X08**
Programmes Éco-Sciences et Maths Appliquées

MAP 563 Modèles Aléatoires pour l'Écologie et l'Évolution (MAEE)

Vincent Bansaye, Amandine Véber, Sylvie Méléard

PC1 – Marches aléatoires, chaînes de Markov
16 janvier 2012

1. On s'intéresse à un processus X_n en temps discret évoluant sur un espace undimensionnel, ici $\mathbb{Z}$. A chaque étape, indépendamment du passé et de sa position, le processus passe à l'entier suivant avec probabilité p et au précédent avec probabilité $q = 1-p$. On peut penser par exemple au déplacement d'un animal dans une rivière ou en bord de mer, ou bien aux fluctuations d'un paramètre (température, ...), ou encore à l'évolution d'une ressource écologique (niveau d'eau, d'une ressource consommable...) ou d'un contenu biologique (nombre de parasites ou de virus dans une cellule, ...). L'espace des états possibles sera ainsi souvent limité à $\mathbb{N}$.

a) On suppose dans cette question que $p < q$, $X_0 = 0$ et on considère la plus grande valeur M prise par le processus :

$$\mathrm{M} := \sup\{i \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N},\ X_n = i\} = \#\{i \geqslant 1 : \exists n \in \mathbb{N},\ X_n = i\}.$$

***a**–i)* En utilisant une caractérisation classique des lois géométriques, montrer que M suit une loi géométrique.

***a**–ii)* Établir une relation entre $\mathbb{P}_0(\mathrm{M} = 0)$ et $\mathbb{P}_0(\mathrm{M} \leq 1)$.

***a**–iii)* En déduire la loi de M.

***a**–iv)* Dans le cas $p = q = 1/2$, montrer qu'une marche aléatoire simple symétrique est récurrente.

b) Le processus évolue maintenant sur $[0, a]$ et est arrêté quand il touche 0 ou a. On peut ainsi prendre en compte des événements prédations interrompant le déplaçement d'un animal, des valeurs critiques pour la température, l'épuisement ou la saturation d'une ressource, la guérison ou la mort d'un organisme infecté...

***b**–i)* Calculer la probabilité p_k que X_n touche zéro avant de toucher a en partant de la position initiale $X_0 = k \in \{0, \ldots, a\}$.

***b**–ii)* Retrouver le résultat de la question $a - iii$) et $a - iv$).

c) Le processus évolue toujours sur $[0, a]$. Il n'est plus arrêté aux bords mais « réfléchi », c'est à dire qu'avec probabilité q (resp. p), il reste en 0 (resp. en a), sinon il fait un pas à droite (resp.

à gauche). On peut penser à un domaine borné pour le déplacement d'un animal, à l'évolution du niveau d'eau d'une réserve... On cherche le comportement asymptotique de X_n.

***c**–i)* Montrer que la probabilité stationnaire d'une chaîne de Markov récurrente positive est aussi une probabilité *invariante*.

***c**–ii)* Donner la loi stationnaire de X_n.

2. On note X_n la taille d'une population au temps n. On suppose que la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait la propriété de Markov et varie au plus de 1 entre deux générations. Les transitions sur $\mathbb{N}^*$ sont donc plus générales que celles de l'exercice précédent. Pour chaque $i \geqslant 0$, on note

$$Q(i,i-1) = q_i, \quad Q(i,i) = r_i, \quad Q(i,i+1) = p_i, \text{ et } Q(i,k) = 0 \text{ si } k \notin \{i-1,i,i+1\}.$$

On suppose que $q_0 = 0$ et $p_i, q_i > 0$ pour tout $i > 0$. On notera $T_x = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$ le premier instant où il y a x individus dans la population.

a) On note $\tilde{X}_n = X_{\min(n,T_0)}$.

***a**–i)* Montrer que $(\tilde{X}_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition $\tilde{Q}$.

***a**–ii)* On cherche une fonction ϕ, telle que $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ et $(\phi(\tilde{X}_n))_{n\geqslant 0}$ est une martingale. Donner une relation de récurrence reliant $\phi(k-1)$, $\phi(k)$ et $\phi(k+1)$.

***a**–iii)* En déduire que

$$\phi(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 \times \cdots \times q_k}{p_1 \times \cdots \times p_k}, \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

b) Pour $0 \leqslant a < k < b$, on note $\mathbb{P}_k(T_b < T_a)$ la probabilité que la taille de la population atteigne le niveau b avant le niveau a sachant qu'initialement il y a k individus.

***b**–i)* En introduisant le temps $T = \min(T_a, T_b)$ montrer que

$$\mathbb{P}_k(T_b < T_a) = \frac{\phi(k) - \phi(a)}{\phi(b) - \phi(a)},$$

***b**–ii)* En déduire que $\mathbb{P}_k(T_0 < \infty) = 1$ si et seulement si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \times \cdots \times q_k}{p_1 \times \cdots \times p_k} \quad \text{diverge.}$$

3. Deux animaux (ou un animal et un observateur) se déplacent dans un domaine modélisé par $\mathbb{N}^2$. Le premier animal se trouve initialement en $(0,0)$ et le second en (a,b). Les deux se déplacent au hasard par sauts simultanés indépendants : le premier (que l'on appelera prédateur) fait des sauts de $(1,0)$ avec probabilité p_E et de $(0,1)$ avec probabilité $p_N = 1 - p_E$. Le second (appelé proie) fait des sauts de $(-1,0)$ avec probabilité p_O et de $(0,-1)$ avec probabilité $p_S = 1 - p_O$.

a) Caractériser les temps auxquels la rencontre a une probabilité non nulle de se produire ainsi que les positions où elle peut se produire.

b) Donner la probabilité de rencontre lorsque $a + b$ est impair. Pour tout entier n, montrer que si $a = b = n$, la probabilité de rencontre vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 p_{\mathrm{E}}^k \, p_{\mathrm{N}}^{n-k} \, p_{\mathrm{O}}^{n-k} \, p_{\mathrm{S}}^k.$$

c) Tous les mois, un cours de danse de salon accueille deux nouvelles recrues venant d'une école d'ingénieurs (de capacité considérée infinie) où le sex-ratio (proportion de femmes) vaut q. Pour tout entier n, calculer la probabilité qu'au moment où il y a enfin $2n$ personnes dans ce cours, il y ait autant de femmes que d'hommes.

d) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$