

MAP 563 Modèles Aléatoires pour l'Écologie et l'Évolution (MAEE)  
Vincent Bansaye, Amandine Véber, Sylvie Méléard

PC2 – Martingales, temps d'arrêt, mouvement brownien.  
23 janvier 2012

1. On souhaite modéliser l'évolution au cours du temps de la quantité de *biomasse* présente dans un bassin d'épuration. On note  $Z_n$  cette quantité (mesurée par exemple en nombre ou en masse sèche de cellules par mètre cube d'eau) au temps  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$ . Entre deux pas de temps, la dynamique est donnée par

$$Z_{n+1} - Z_n = r_{n+1}Z_n, \quad (1)$$

où  $r_{n+1}$  est une variable aléatoire bornée à valeurs dans  $[-1, +\infty[$ . On note  $M_n = \sum_{k=1}^n r_k$ .

a) Expliquez (1).

b) Montrez que  $Z$  est une martingale si et seulement si  $M$  en est une.

c) Afin de maintenir un contrôle de la quantité de biomasse, des additifs sont incorporés à chaque pas de temps en fonction de l'évolution passée  $(Z_0, \dots, Z_n)$ . On suppose qu'ils ont une action rapide, de sorte que l'on modélise maintenant la dynamique de  $Z$  entre  $n$  et  $n+1$  par :

$$Z_{n+1} = \frac{1 + r_{n+1}}{1 + a_{n+1}} Z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où la variable aléatoire  $a_{n+1}$  est supposée être  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et minorée par  $a_* > -1$ . A nouveau, on note  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Montrez que  $Z$  est une martingale, si et seulement si  $(M_n - A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en est une. A quelle politique de contrôle cela correspond-il ?

d) On suppose dorénavant que  $Z_0 = 1$ , les  $a_n$  sont nuls et les  $r_n$  sont i.i.d. de loi  $\mathbb{P}(r_n = -\varepsilon) = \mathbb{P}(r_n = \varepsilon) = 1/2$  avec  $0 < \varepsilon < 1$ . Quel est le comportement de  $Z_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  ?

e) Pour  $z > 1$ , on note  $T_z$  le temps du premier passage de  $Z_n$  au dessus du niveau  $z$ . Montrez que

$$\frac{1}{z(1 + \varepsilon)} \leq \mathbb{P}(T_z < +\infty) \leq \frac{1}{z}.$$

2. Le but de cet exercice est d'utiliser des marches aléatoires pour construire des solutions implicites à un certain type d'équations aux différences que l'on ne sait pas résoudre explicitement. L'un des intérêts principaux de cette méthode est que l'on peut alors obtenir des valeurs numériques de ces solutions en simulant les marches aléatoires correspondantes.

Soit donc  $(X_n; n \geq 0)$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbb{Z}^d$ , dont les seules transitions sont au plus proche voisin. On définit le vecteur unité  $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , où le 1 est à la  $i$ -ème place, et on note  $p(x; e_i, \epsilon)$  la probabilité de transition de  $x$  à  $x + \epsilon e_i$ , où  $\epsilon = \pm 1$  :

$$p(x; e_i, \epsilon) := \mathbb{P}(X_{n+1} = x + \epsilon e_i \mid X_n = x) \quad x \in \mathbb{Z}^d, \epsilon = \pm 1, i = 1, \dots, d.$$

Cette marche aléatoire modélise entre autres le déplacement d'un individu dans un paysage inhomogène (pour  $d \geq 3$ , on imaginera par exemple un paysage génétique dans lequel la position de l'individu représente une combinaison d'allèles et le passage d'un site à l'autre s'effectue par mutation lors de la transmission de ses gènes à son descendant).

On considère un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{Z}^d$ , dont on note  $A^c$  le complémentaire et  $\partial A$  le bord. On suppose que le temps d'atteinte de  $A$  par  $X$  est fini p.s. Soit  $u$  une fonction réelle *bornée* définie sur  $A^c \cup \partial A$  et telle que

$$\sum_{i=1}^d \sum_{\epsilon=\pm 1} p(x; e_i, \epsilon) (u(x + \epsilon e_i) - u(x)) = 0, \quad \forall x \in A^c. \quad (2)$$

**a)** En utilisant une martingale appropriée, montrer que si  $u$  vérifie (2) et  $u$  est nulle sur  $\partial A$ , alors  $u$  est identiquement nulle.

En déduire qu'il existe au plus une solution de (2) vérifiant une condition au bord donnée (condition au bord = valeurs de  $u$  sur  $\partial A$ ).

**b)** Montrer que pour tout sous-ensemble  $B$  de  $\partial A$ , il existe une solution de (2) avec condition au bord  $u(x) = \mathbf{1}_B(x)$  pour  $x \in \partial A$ .

**c)** Proposer une méthode générale pour trouver une solution de (2) avec condition au bord  $u(x) = g(x)$  pour tout  $x \in \partial A$ , où  $g : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction quelconque.

**d)** Montrer que si  $X$  est récurrente et irréductible dans  $\mathbb{Z}^d$ , alors les seules solutions bornées de (2) sur  $\mathbb{Z}^d$  (i.e.,  $A = \emptyset$ ) sont les constantes.

[L'analogue continu de ce théorème dans le cas isotrope est le *théorème de Liouville* : en dimensions 1 et 2, les seules solutions bornées de  $\Delta u = 0$  sont les constantes.]

**3.** On considère un individu se déplaçant suivant un mouvement brownien unidimensionnel  $(B_t : t \geq 0)$  et tué en un point  $a > 0$ . On imaginera par exemple une araignée d'eau se déplaçant le long d'une rivière et attendue en  $a$  par une bande de grenouilles. Plus sérieusement, on peut aussi modéliser de cette manière un virus ayant pénétré le cytoplasme d'une cellule et diffusant le long des microtubules jusqu'à atteindre son noyau. On cherche à savoir si et quand l'araignée va mourir et si elle aura le temps de se reproduire auparavant (resp si le virus va atteindre le noyau et ce avant de se détacher de la microtubule).

**a)** Soit  $\lambda > 0$ . Montrer que  $\exp(\lambda B_t - \lambda^2 t/2)$  est une martingale.

**b)** On note  $T_a$  le temps d'atteinte de  $a$  par le mouvement brownien. Montrer que  $\exp(\lambda B_{t \wedge T_a} - \lambda^2 (t \wedge T_a)/2)$  est une martingale bornée.

**c)** L'araignée se reproduit au bout d'un temps que l'on supposera exponentiel de paramètre  $\mu$  (pourquoi?). Montrer que la probabilité  $p$  qu'elle meure sans descendance est donnée par

$$p = \exp(-a\sqrt{2\mu}).$$

d) Il y a maintenant une autre colonie de grenouilles en  $-a$ . On note  $T_a^* := T_a \wedge T_{-a}$  le premier temps d'atteinte de l'une des zones à grenouilles par l'araignée. Trouver une martingale qui permette de calculer la nouvelle probabilité  $p$  de mort sans reproduction et montrer que

$$p = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\mu})}.$$

e) À l'aide du résultat précédent, montrer que

$$\mathbb{E}[T_a^* e^{-\mu T_a^*}] = \frac{a}{\sqrt{2\mu}} \frac{\sinh(a\sqrt{2\mu})}{\cosh^2(a\sqrt{2\mu})}.$$

f) En déduire rigoureusement que  $\mathbb{E}[T_a^*] = a^2$  et retrouver ce résultat à l'aide d'une martingale très simple.

4. De nombreux mécanismes cellulaires reposent sur une suite d'interactions de type activation-inhibition entre différents composants de la cellule. Considérons un schéma simplifié de telles interactions. Supposons que deux protéines  $a$  et  $b$

- s'inhibent mutuellement : tant que l'une est présente, l'autre ne peut accomplir sa mission en se liant au récepteur approprié (c'est le cas par exemple des protéines Gap qui régissent l'une des phases du développement embryonnaire chez la drosophile et dont l'impossibilité de coexister conduit à la segmentation du corps de l'insecte) ;
- voient leur concentration à l'état actif dans la cellule fluctuer de manière indépendante au gré de leurs liaisons et détachements avec d'autres composants. On modélise ces fluctuations de concentration par deux mouvements browniens indépendants ( $B_t^a, t \geq 0$ ) et ( $B_t^b, t \geq 0$ ).

On suppose que les concentrations initiales sont  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ , et on veut savoir quel type de protéine finira par accomplir sa mission.

En utilisant le fait qu'un mouvement brownien plan  $B$  peut s'écrire  $B_t = \rho_t e^{i\theta_t}$  où l'argument  $(\theta_t; t \geq 0)$  est une martingale et  $(\rho_t; t \geq 0)$  un processus positif, calculer la probabilité que les protéines  $b$  disparaissent en premier et laissent les protéines  $a$  s'activer.