Feuille no. 1
Modèles de marches aléatoires et processus de branchement

Exercice 1:
Marche aléatoire en dimension 1**.** Soient $(X_i : i \geq n)$ des variables alétaoires indépendantes et identiquement distribuées comme une variable aléatoire X. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1) Supposons que $\mathbb{E}(X)$ (est bien défini et) est fini, non nul. Que dire du comportement de S_n quand n tend vers l'infini ?
2) Supposons que $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$.
2.a) Calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \infty$.
2.b) Conclure que $\mathbb{P}(\exists n \geq 1,\ S_n = 0) = 1$ (on dit est 0 est *récurrent*) puis expliquer pourquoi

$$\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty = -\liminf_{n\to\infty} S_n \qquad \text{p.s.}$$

Indication : on pourra prouver que si $p := \mathbb{P}(\exists n \geq 1 S_n = 0) < 1$, *alors le nombre de passage de la marche aléatoire par* 0 *suit une loi géométrique de paramètre* p.
2.c) Que dire des limites de $S_n/n, S_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$?
Quel bon changement d'échelle de la marche aléatoire S_n proposez-vous de façon à (bien) voir la marche aléatoire sur un intervalle de temps $t \in [0, n]$ quand $(n \to \infty)$ (par exemple par simulation) ?

Exercice 2:
Croissance d'un processus de Galton-Watson surcritique. On considère un processus de Galton-Watson de variable aléatoire de reproduction N. On suppose que le nombre moyen d'enfants par individu vaut $m = \mathbb{E}(N) > 1$. De plus, on suppose que $\mathbb{E}(N^2) < \infty$ et on rappelle que

$$\frac{Z_n}{m^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} W \quad \text{dans } L^2,$$

avec W variable aléatoire positive.

0) Montrer que $\mathbb{E}(W) = 1$.
1) Montrer que $\mathbb{P}_i(Z_n/m^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) = \mathbb{P}_1(Z_n/m^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0)^i$ pour tout $i \geq 1$.
2) On note f la fonction génératrice de N. Montrer que $f(\mathbb{P}(W = 0)) = \mathbb{P}(W = 0)$ puis que $\{W > 0\} = \{\forall n : Z_n > 0\}$.

Exercice 3:
Du branchement à la marche aléatoire (ou du multiplicatif à l'additif). On considère le processus de Galton-Watson muni de la loi de reproduction donnée par la v.a. N : $\mathbb{P}(N = 2) = \mathbb{P}(N = 0) = 1/2$. On appelle Z_n la taille de la population à la génération n.

0) Un tel processus vérifie la propriété de branchement. Rappelez cette propriété et l'hypothèse biologique forte qu'elle suppose.
1) Que vaut $\mathbb{E}(Z_n)$? Donner le comportement de Z_n/N_0 quand $N_0 \to \infty$, avec N_0 le nombre initial d'individus.
2) Tracer une réalisation de l'arbre de Galton-Watson (jusqu'à par exemple $n = 4$ générations).

Tracer l'évolution de l'effectif de la population associée, individu par individu, c'est à dire que chaque évenement de naissance ou de mort se traduit par une variation de $+1$ ou -1.
3) En déduire que p.s.

$$Z_n = S_{\tau_n}$$

où $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, avec $(X_i : i \geq 0)$ v.a. i.i.d. de loi commune N, et τ_n une variable aléatoire qui pourra être explicitée.
4) Retrouver maintenant le comportement en temps long de Z_n, c'est-à-dire la limite p.s. de Z_n quand $n \to \infty$.

Exercice 4:
Processus de branchement à deux types et connection d'habitats.
1) Dans ce modèle, la population est formée de deux types. Chaque individu se reproduit indépendant des autres et on note N_{ij} le nombre d'enfants de type j engendrés par un individu de type i. On note M la matrice des moyennes définie par $M_{ij} = \mathbb{E}(N_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq 2)$.
Soit $Z_n^{(i)}$ le nombre d'individus de type i dans la population à la génération n et

$$Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)})$$

1.a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n) = Z_n M$.
1.b) Préciser le critère d'extinction et le taux de croissance de la population quand $m_{ij} \neq 0$ pour $i, j = 1, 2$.
Précision : on veut un résultat pour toute répartition initale.
1.c-bonus) Conjecturer le comportement de Z_n en temps grand sous les hypothèses de la question précédente.

2) On considère une population vivant dans deux habitats de qualités différentes. Le nombre moyen d'enfants dans l'habitat 1 est M et dans l'habitat 2 est m. La probabilité pour chaque individu de changer de patch avant de se reproduire est $p \in (0, 1)$ si il vit dans l'habitat 1 et $q \in (0, 1)$ si il vit dans l'habitat 2.
On évite la situation où p.s. chaque individu donne naissance à exactement un enfant avec probabilité un.
2.a) Justifier que le critère d'extinction de la population est donné par

$$M(1-p) + m(1-q) + \sqrt{(M(1-p) + m(1-q))^2 + 4Mmpq} \leq 2.$$

On reprend la situation précédente mais maintenant l'environnement alterne entre deux états. Aux générations paires, le nombre moyen d'enfants dans le patch 1 vaut M_1 et celui dans le patch 2 vaut m_1. Aux générations impaires, le nombre moyen d'enfants par individu dans l'habitat 1 vaut M_2 et celui dans l'habitat 2 vaut m_2.
2.b) Précisez maintenant le critère d'extinction de la population. Expliquer (et prouver) que la connection entre les habitats peut permettre la survie de la population avec probabilité positive alors qu'elle s'éteindrait presque surêment en restant dans un des deux habitats ($q = 0$ ou $p = 0$).

Exercice 5:
Processus de branchement à deux types et modèle épidémiologique. Au temps n, une population est constituée d'individus sains en quantité S_n, et d'individus infectés en quantité I_n. À chaque pas de temps, indépendamment,

- chaque individu sain est infecté avec probabilité τ, et avec probabilité $1 - \tau$ est remplacé par un nombre aléatoire d'individus sains, de fonction génératrice g ;
- chaque individu infecté meurt avec probabilité a, et avec probabilité $1 - a$ est remplacé par un nombre aléatoire d'individus infectés, de fonction génératrice g.

Le but du problème est d'étudier le comportement asymptotique de cette population et en particulier son extinction. On note $\mathbb{P}_{(i,j)}$ la loi du processus (S_n, I_n) quand $(S_0, I_0) = (i, j)$.
1) Comment interprétez-vous le fait que la fonction g soit la même dans les deux lois de reproduction ?

2) On pose $u_n = \mathbb{P}_{(1,0)}(S_n + I_n = 0)$, $v_n = \mathbb{P}_{(0,1)}(S_n + I_n = 0)$.
2.a)Justifier que $\mathbb{P}_{(i,j)}(S_n = 0, I_n = 0) = u_n^i \, v_n^j$ et montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \tau v_n + (1-\tau) g(u_n) & , \\ v_{n+1} = a + (1-a) g(v_n) & , \end{cases}$$

2.b) En déduire les équations vérifiées par q_1 et q_2, oèu q_1 (respectivement q_2) désigne la probabilité d'extinction d'une population issue d'un individu sain (respectivement infecté).
2.c-bonus) Discuter les valeurs de q_1 et q_2 dans le cas où $g(s) = s^2$ et $a = 1/2$ en fonction du paramètre τ.
3) On suppose que g est dérivable en 1.
3.a) Calculer le nombre moyen $(\mathbb{E}(S_n), \mathbb{E}(I_n))$ d'individus sains et infectés au temps n en fonction de $(\mathbb{E}(S_{n-1}), \mathbb{E}(I_{n-1}))$.
3.b) Donner le critère d'extinction global de la population.
3.c) Dans quel cas la population moyenne d'individus sains tend vers l'infini quand n tend vers l'infini ?
3.d) Dans quels cas la population moyenne d'individus infectés tend vers l'infini quand n tend vers l'infini ?
4-bonus) Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ quand $\tau = a$.

Exercice 6:
Stratégies de grandes déviations. On considère un processus de Galton Watson de variable aléatoire de reproduction N, telle que

$$\mathbb{P}(N = 0) = 0, \qquad \mathbb{P}(N = 1) > 0, \qquad \mathbb{P}(N \geq 2) > 0$$

1) Donner la limite de $\log(Z_n)/n$ quand $n \to \infty$.
2) Comment, d'après vous, se comporte $(\log(Z_{[nt]})/n : t \in [0, 1])$ quand $n \to \infty$?
3) Quelle est la façon la plus probable de réaliser un evénement exceptionnel

$$\{Z_n \leq c^n\} \qquad \text{avec } c < \mathbb{E}(N) \text{ et } \ n \to \infty.$$

En déduire une estimation de $\mathbb{P}(Z_n \leq c^n)$.

Exercice 7:
Liens entre différents modèles de population. On s'intéresse à un modèle représentant une population se reproduisant par génération, de manière aléatoire. On rappelle tout d'abord la définition historique du *processus de Galton-Watson*.

Modèle 1 : On part d'un nombre fini $N_0 \in \mathbb{N}$ d'individus. D'une génération à une autre, chaque individu disparaît et laisse derrière lui un nombre aléatoire ξ de descendants (indépendant du nombre de descendants laissé par les autres), dont on notera m la moyenne. On note également N_n la taille de la population à la génération n.

L'objectif de cet exercice est de relier le processus de Galton-Watson aux trois modèles ci-dessous :

Modèle 2 : La population initiale est de taille $x_0 \geq 0$ et la taille x_n de la population à la génération n est définie de manière récursive par $x_{n+1} = m\, x_n$.

Modèle 3 : On part de $Z_0 \in \mathbb{N}$ individus. Chaque individu, indépendemment des autres, meurt au bout d'un temps aléatoire de loi Exp(1) et est remplacé par un un nombre aléatoire ξ de descendants. Une fois ces descendants nés, chacun vit à nouveau un temps de loi Exp(1) et donne naissance à un nombre de descendants de même loi que ξ, etc. On note Z_t la taille de la population à l'instant $t \geq 0$.

Modèle 4 : La population initiale est de taille $X_0 \geq 0$ et la taille X_t de la population à l'instant t est définie comme la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dX_t}{dt} = \alpha X_t.$$

1 - a) Obtenir le modèle 2 à partir du modèle 1. *Indice :* Quelle hypothèse fait-on souvent sur la population modélisée pour justifier une évolution déterministe (= non-aléatoire) ?

b) Quelles différences qualitatives y a-t-il entre ces deux modèles en temps long ?

2) Obtenir le modèle 4 à partir du modèle 2.

3 - a) Obtenir le modèle 3 à partir du modèle 1.

b) Quelles différences séparent ces deux modèles ?

c) Pour quel type de population peut-on utiliser ce modèle ?

4 - a) Obtenir le modèle 4 à partir du modèle 3.

b) Quelles différences séparent ces deux modèles ?

5 - a) Tracer le diagramme reliant tous ces modèles. Peut-on obtenir directement le modèle 4 à partir du modèle 1 ?

b) Peut-on obtenir d'autres modèles comme limite du modèle 1 de Galton-Watson ? *Indication : on pourra calculer* $\mathbb{E}(Z_{[Nt]}/N)$ *et* $Var(Z_{[Nt]}/N)$ *dans le cas critique* $\mathbb{E}(\xi) = 1$.

Exercice 8:
Processus de Galton Watson avec catastrophe. On considère un processus de Galton Watson où la loi de reproduction est donnée par variable N. Mais à chaque génération, se produit avec probabilité ϵ. Cette catastrophe tue alors indépendamment chacun des individus avec probabilité p.
1) Justifier que le processus Z obtenu est un processus de Galton Watson en environnement aléatoire et préciser sa loi.
2) Donner la taille moyenne de la population $\mathbb{E}(Z_n)$ à la géération n et le critère d'extinction p.s. de la population.
3) On fixe le nombre moyen d'individu $m = \mathbb{E}(Z_1)$, avec $m > 1$. Préciser pour quelle valeurs de p, en fonction de m et de ϵ, la population s'éteint p.s.

Pour aller plus loin...

Exercice 9:
Convergence conditionnelle pour des processus de Galton-Watson critique. Considérons un processus de Galton-Watson $(Z_n : n \geq 0)$ de variable aléatoire de reproduction N. Nous supposons ici que $\mathbb{E}(N) = 1$, $\mathbb{P}(N = 1) < 1$, $\mathbb{E}(N^2) < \infty$ et admettons que

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}$$

quand $n \to \infty$, où $\sigma^2 = \mathbb{E}([N - \mathbb{E}(N)]^2)$. On note

$$f_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}).$$

1) Montrer qu'il existe une suite d'entiers m_n tel que

$$f_{m_n}(0) \leq \exp(-\lambda/n) \leq f_{m_{n+1}}(0), \qquad m_n \sim \sigma^2 n/\lambda.$$

2) Montrer alors que

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda Z_n/n) \mid Z_n > 0) = \frac{1 - f_n(\exp(-\lambda/n)}{1 - f_n(0)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{\sigma^2 + \lambda}.$$

3) En déduire que Z_n/n conditionné à $Z_n > 0$ converge en loi vers une v.a. exponentielle de paramètre σ^2.

Exercice 10:
Marche aléatoire simple symétrique dans $\mathbb{Z}^d$. On considère la marche aléatoire issue de 0

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

où les X_i sont des v.a. i.i.d. de loi commune μ. Le support de μ est inclus dans $\mathbb{Z}^d$ et en notant $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$:

$$\mu(e_i) = \mu(-e_i) = \frac{1}{2d}.$$

Autrement dit, la marche aléatoire passe (sans mémoire) d'un point de $\mathbb{Z}^d$ à un point voisin choisi au hasard de manière équiprobable.
On cherche à savoir si la marche va presque sûrement toujours revenir à son point de départ (récurrence) ou si elle peut s'échapper à l'infini.

1. Discuter intuitivement de l'effet de la dimension sur cette propriété de récurrence.
   On appelle ici L^1 l'espace des fonctions sommables $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, i.e. $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)| < \infty$. Pour ces fonctions, on définit la transformée de Fourier

   $$\hat{f}(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)e^{i\langle\theta,x\rangle} \qquad (\theta \in \mathbb{R}^d)$$

   et le produit de deux fonctions par

   $$f \star g(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f(y)g(x-y).$$

2. Montrer que si $f, g \in L^1$ alors $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$.
3. Montrer que si $f \in L^1$ alors $\hat{f}$ est une fonction bornée et on a la formule d'inversion

   $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{]-\pi,\pi]^d} \hat{f}(\theta)\ e^{-i\langle\theta,x\rangle} d\theta \qquad (x \in \mathbb{Z}).$$

4. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de $x \to \mu(x)$ vaut

   $$\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos(\theta_k).$$

   Montrer ensuite que $\hat{\mu}(\theta) < 1$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]^d \backslash \{0\}$ et que

   $$1 - \hat{\mu}(\theta) \sim \frac{|\theta|^2}{2d} \quad \text{quand } \theta \to 0.$$

5. On définit pour $|\lambda| \leq 1$:

   $$u_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbb{P}(S_n = x).$$

   (a) Montrer que $u_\lambda(x)$ croît vers $u(x)$ quand λ croît vers 1.
   (b) Montrer que si $|\lambda| < 1$, alors $u_\lambda \in L^1$ et

   $$\hat{u}_\lambda(\theta) = \frac{1}{1 - \lambda\hat{\mu}(\theta)}.$$

   (c) En déduire dans quel cas $u_1(0)$ est finie.
6. Conclure sur la récurrence de la chaîne.

Exercice 11:
Grandes déviations de la marche aléatoire. On considère une suite de variables aléatoires $(X_i : i \in \mathbb{N})$ i.i.d de même loi que la v.a. X.
On suppose que X admet des moments exponentiels de tout ordre et on définit pour $\lambda, x \in \mathbb{R}$:

$$m := \mathbb{E}(X), \quad \Lambda(\lambda) := \log\left(\mathbb{E}(e^{\lambda X})\right), \quad \Psi(x) := \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} = \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}.$$

1) On veut montrer que pour tout $x \geq m$,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq nx\right) = \Psi(x).$$

1.a) Montrer la borne inférieure en utilisant l'inégalité de Markov $\mathbb{P}(X \geq 0) \leq \mathbb{E}(e^X)$.

1.b) En utilisant le réel τ et le changement de loi associés à x par

$$x = \Lambda'(\tau) = \frac{\mathbb{E}\left(Xe^{\tau X}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\tau X}\right)}, \quad \mathbb{P}(\widetilde{X} \in \mathrm{d}u) = \frac{e^{\tau u}}{\mathbb{E}(e^{\tau X})}\,\mathbb{P}(X \in \mathrm{d}u),$$

montrer que pour tout $m \leq x < y$,

$$\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq ny\right) \leq \tau y - \Lambda(\tau).$$

1.c) Conclure.

2) Justifier que Λ est convexe.

3) Quelle est la forme de la trajectoire $(S_i : i \geq n)$ conditionnée à $S_n \geq an$, avec $a > m$ et $n \to \infty$?
On pourra supposer Λ strictement convexe ou se limiter à un domaine où elle l'est

Exercice 12:
Processus de branchement en environnement aléatoire : le cas géométrique. On appelle $\mathcal{E}_i$ l'environnement à la génération i et on suppose que les lois de reproduction sont géométriques, c'est à dire que la fonction génératrice de la loi de reproduction à la génération i vaut

$$f_{\mathcal{E}_i}(s) = 1 - \frac{1-s}{m(\mathcal{E}_i)^{-1} + (1-s)}.$$

1) On rappelle que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\log m(\mathcal{E}_k)$. Prouver que pour tout $s \in [0,1]$

$$\mathbb{E}(s^{Z_n} \mid \mathcal{E}_0, \dots \mathcal{E}_{n-1}) = 1 - \frac{1-s}{\exp(-S_n) + (1-s)\sum_{k=0}^{n-1}\exp(-S_k)}.$$

2) En déduire une expression de $\mathbb{P}(Z_n > 0)$ et de $\mathbb{P}(Z_n = 1)$ en fonction de la marche aléatoire S.
3) Trouver le critère d'extinction pour des environnement $\mathcal{E}_i$ i.i.d.