Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 1 - 23 mai 2011

Stéphanie Allassonnière, Vincent Bansaye

Probabilités

EXERCICE 1 -
Je suis dans une pièce où il y a n personnes.
A partir de quelle valeur de n vais je vouloir parier que deux personnes dans la pièce sont nées le même jour ? (0n pourra utiliser l'équivalence $\ln(1+x) \sim x$ pour $x << 1$).

EXERCICE 2 - Une personne écrit n lettres et les ferme avant d'écrire les adresses sur les enveloppes. On suppose que tous les destinataires ont une adresse différente.
Quelle est la probabilité pour qu'au moins une lettre arrive au bon destinataire ? Donner la limite de cette probabilité lorsque $n \to \infty$.

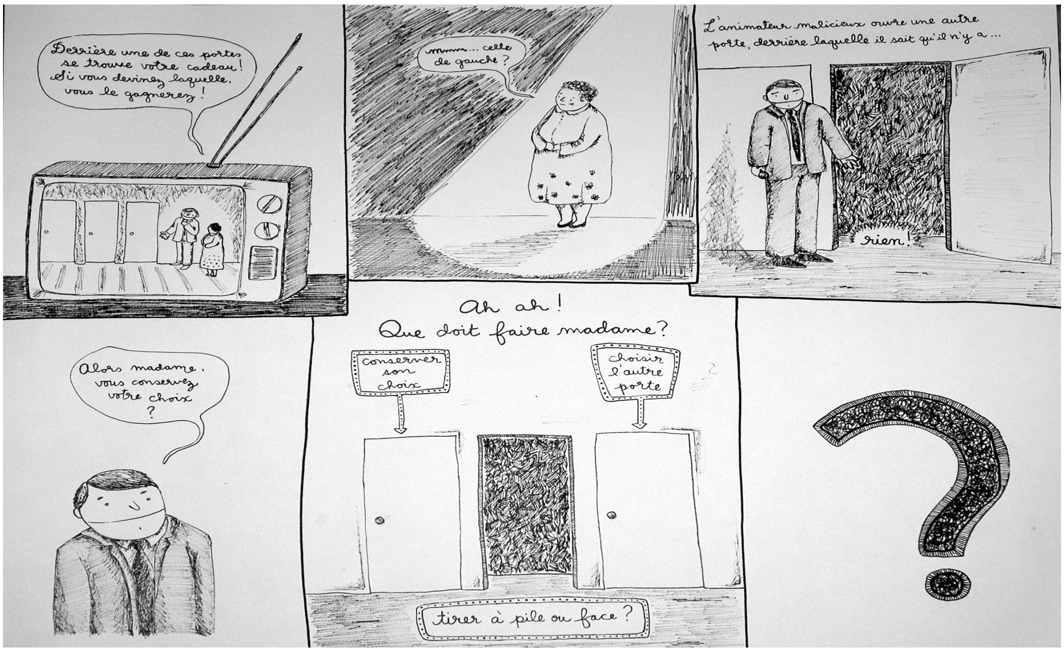
EXERCICE 3 -
Dans un match de tennis, un joueur a une probabilité p de gagner un point contre son adversaire lorsqu'il est au service. Calculer la probabilité qu'il a de gagner le jeu sachant qu'il est à 40-30 sur son service.

Evénements indépendants et conditionnement

EXERCICE 4 -
Soit $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ muni de léquiprobabilité. On définit les événements $A := \{\omega_1, \omega_2\}$, $B := \{\omega_1, \omega_3\}$ et $C := \{\omega_2, \omega_3\}$. Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux. Comparer $\mathsf{P}(A \cap B \cap C)$ et $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$.

EXERCICE 5 -
L'exercice suivant est très classique et a de nombreuses variantes. Il illustre l'utilité d'une formulation mathématique rigoureuse pour éviter des pièges et des paradoxes dus à des raisonnements spécieux.
Je me rends chez un ami qui a deux enfants. Je ne sais absolument plus si il s'agit de garcons et/ou de filles mais suppose qu'à chaque naissance, un couple a autant de chances d'avoir un enfant qu'une fille.
Quelle probabilité y a t il pour que mes amis aient (au moins) un garçon dans chacune des situations suivantes
a) Ils me disent à mon arrivée : "L'aînée est à la maison, elle prépare son bac".
b) Je vois des poupées qui traînent sur le canapé, pas de doutes, ils ont au moins une fille.

EXERCICE 6 -
Il s'agit d'un jeu télévisé. Il y a trois portes (fermées), derrière une porte il y a un cadeau, derrière les deux autres il n'y a rien. Le présentateur télé demande au candidat de choisir une porte. S'il choisit celle où il y a le cadeau il gagne le cadeau, sinon il s'en retourne les mains vides. Le candidat choisit sa porte. Le présentateur (pour jouer avec les nerfs du candidat) décide d'ouvrir une autre porte, où il sait qu'il n'y a rien. Il redemande alors au candidat de choisir une porte. Quelle est la meilleur stratégie pour le candidat ? Garder sa porte, choisir au hasard une des deux portes restantes (à pile ou face), ou changer de porte ?



EXERCICE 7 -
On considère une usine fabriquant des cartes électroniques. Lors de la production une carte sur 100 000 est défectueuse. En fin de production, on effectue un test pour savoir si la carte est défectueuse ou non. Pour les pièces défectueuses le test est positif dans 95 % des cas, pour les pièces correctes dans 1% des cas.
Le test indique qu'une pièce donnée est défectueuse (test positif). Quelle est la probabilité que la pièce soit effectivement défectueuse ?

EXERCICE 8 - Je cherche à savoir combien d'élèves en première année à l'Ecole Polytechnique prennent de la drogue. Quelle question leur poser pour faire un sondage pertinent ?

Evénements, tribus

EXERCICE 9 -
1) Montrez qu'une tribu engendrée par une famille finie de parties est engendrée par une partition finie.
2) Décrire tous les éléments de cette tribu et justifier qu'elle est dénombrable.
3) Montrez que ce résultat est faux si on remplace fini par dénombrable. (Utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.)

EXERCICE 10 -Un exemple d'ensemble non mesurable
Sur $\mathbb{R}$ on définit la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix (si A est une fonction sur un ensemble I telle que $A(x) \neq \emptyset$ pour tout x de I, il existe une fonction f telle que $f(x) \in A(x)$ pour tout $x \in I$), construire un ensemble $A \in [0,1[$ qui contient exactement un point de chaque classe d'équivalence. Supposons A mesurable, et soit $\alpha = \lambda(A)$ sa mesure de Lebesgue. Montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$ et $r \neq s$, alors $(A+s) \cap (A+r) = \emptyset$, où $A + x = \{y + x \,:\, y \in A\}$, et que $\lambda(A+s) = \lambda(A)$. Remarquer que

$$1 = \lambda\big([0,1]\big) \leq \lambda\Bigg(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A+r) \Bigg) \leq \lambda\big([-1,2]\big) = 3.$$

En utilisant la σ-additivité de λ, montrer que cette inégalité conduit d'une part à $\alpha = 0$, d'autre part à $\alpha > 0$. Conclure.