Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

Vecteurs aléatoires

EXERCICE 1 - Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi normale $\mathcal{N}(0, I_2)$, c.a.d. sa densité f_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\|x\|^2/2},$$

où $\| x \| = \| (x_1, x_2) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est la norme euclidienne usuelle.

1) Déterminer la loi de la v.a. $\| X \|^2$

2) Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq x_2\}$. Démontrer que la variables aléatoire T définie par

$$T := \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2}\right)^2 \text{ si } x \in D; \qquad T := 0 \text{ si } x \notin D,$$

admet une densité égale à (loi de Hotelling)

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \frac{1}{\pi(x+1)\sqrt{x}}$$

Solution :
1) En utilisant un changement de variable polaire puis le changement $u = \rho^2$, on obtient pour tout fonction positive à support compact

$$\mathsf{E}(f(\| X \|^2)) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(\rho^2) e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) \frac{1}{2} e^{-u/2} du.$$

Ceci prouve que $\| X \|^2$ ext une variable exponentielle de paramètre $1/2$.

2) On effectue le changement de variable

$$u = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \; v = x_1 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(v + \frac{v}{u}\right), \; x_2 = \frac{1}{2}\left(v - \frac{v}{u}\right)$$

de jacobien $-v/2u^2$ et on utlise le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(f(T)) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{f(u^2)}{u^2} \left[\int_{\mathbb{R}} |v| \exp(-v^2(1 + 1/u^2)/4) dv\right] du \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{f(u^2)}{u^2} \frac{8u^2}{1+u^2} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\pi(x+1)\sqrt{x}} dx
\end{aligned}$$

EXERCICE 2 - Vous vous rendez à une station de bus où un bus passe en moyenne toutes les 10 min. Les temps de passage entre deux bus suivent des variables aléatoires i.i.d. Combien de temps attendrez vous le bus en moyenne ?
Est ce que parfois, il vaut mieux rater le bus (à quelques secondes) plutot que de ne pas le voir en arrivant ?