

Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

MAP 311 - PC 5 - 20 juin 2011

Sommes de variables aléatoires indépendantes et convergence en loi

EXERCICE 1 - Loi du χ^2 et grandes déviations

La loi du χ^2 (prononcer ki-deux) à n degrés de liberté est la loi de $X_n = \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2$ où les ε_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. C'est une loi très importante en statistiques, notamment lorsqu'on veut savoir si des données sont cohérentes avec un modèle probabiliste ayant n paramètres. Il est alors important de savoir estimer la taille des fluctuations de X_n autour de son espérance.

1. Quelle est l'espérance de X_n ? Montrer que la loi de X_n a une densité de la forme $c_n x^{n/2-1} e^{-x/2} 1_{x>0}$.
2. Pour $\lambda \in]0, 1/2[$, calculer $E(e^{\lambda X_n})$ et en déduire l'inégalité pour tout $\delta > 0$:

$$P(X_n > (1 + \delta)n) \leq e^{-nL_\delta(\lambda)} \quad \text{avec } L_\delta(\lambda) = (1 + \delta)\lambda + \frac{1}{2} \log(1 - 2\lambda).$$

3. En optimisant l'inégalité précédente en λ , en déduire que

$$P(X_n > (1 + \delta)n) \leq e^{-n\phi(\delta)} \leq e^{-n(\delta^2/4 - \delta^3/6)} \quad \text{avec } \phi(\delta) = \frac{1}{2}(\delta - \log(1 + \delta)).$$

4. En répétant le même raisonnement en remplaçant λ par $-\lambda$ montrez que

$$P(X_n < (1 - \delta)n) \leq e^{-n\psi(\delta)} \leq e^{-n\delta^2/4} \quad \text{avec } \psi(\delta) = -\frac{1}{2}(\delta + \log(1 - \delta)).$$

5. En déduire pour tout $x > 0$ l'inégalité de déviation

$$P(|X_n - n| > \sqrt{n}x) \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6\sqrt{n}}\right).$$

EXERCICE 2 - Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} .

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si $(P(X_n > 0))_{n \geq 1}$ tend vers 0.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si $\sum_{n \geq 1} P(X_n > 0) < +\infty$.
3. On suppose que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. Préciser si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en moyenne, en probabilité, presque sûrement, dans le cas où $p_n = \frac{1}{n^2}$ puis dans le cas où $p_n = \frac{1}{n^3}$.
4. On suppose que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha_n)$. Préciser si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en moyenne, en probabilité, presque sûrement, dans le cas où $\alpha_n = \frac{1}{n}$ puis dans le cas où $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$.
5. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de X_n est donnée par $P(X_n = n^2) = \beta_n$ et $P(X_n = 0) = 1 - \beta_n$. Préciser si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en moyenne, en probabilité, presque sûrement, dans le cas où $\beta_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$, puis dans le cas où $\beta_n = \frac{1}{n^3}$.

EXERCICE 3 - Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée et $\alpha > 0$ calculer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

EXERCICE 4 - Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires I.I.D. (i.e. indépendantes et de même loi) strictement positives et d'espérance 1 et telles que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) < 1, \quad \exists \alpha > 0 / \mathbb{P}(\alpha \leq X_1) = 1.$$

On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1. En remarquant que pour $x \in]0, \infty[\setminus \{1\}$, $\ln(x) < x - 1$, vérifier que $\mathbb{E}(\ln(X_1)) < 0$. En étudiant le comportement de $\frac{1}{n} \ln(Y_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, montrer que la suite Y_n converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera.
2. Un joueur joue tous les jours le dixième de sa fortune à pile ou face avec un ami. Quelle est l'évolution de cette fortune au bout d'un temps très long ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. La suite Y_n converge-t-elle en moyenne ?

EXERCICE 5 - Théorème de Weierstrass

Soient f une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} et $x \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

1. Montrer que $p_n(x) := \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$ est un polynôme en x (appelé polynôme de Bernstein de f).
2. En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$, montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] \leq \epsilon \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - x| \leq \delta) + 2 \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - x| > \delta) \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + 2 \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

3. Démontrer le théorème de Weierstrass : toute application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes.

EXERCICE 6 - Trouver une suite de v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$ qui converge en probabilité vers 0 mais qui p.s. ne converge pas vers zéro.