TDLM115. Suites

1 Convergence des suites

Exercice 1:
Déterminer la convergence des suites suivantes

$$(-1)^n, \quad \frac{a^n}{n!} \text{ avec } a > 0, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big)^n, \quad \big(2 - \frac{1}{n}\big)^n, \quad \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n.$$

Déterminer la monotonie des suites suivantes

$$\frac{1}{n^2 + (-1)^n}, \qquad \frac{n+1}{n+2}, \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Exercice 2:
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x_n = E(nx)/n$ converge x.
2) En déduire que tout réel est limite d'une suite de rationnel ($\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3:
Montrer que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes (utiliser $\cos(n+1)$ et $\sin(n+1)$).

Exercice 4:
Soit u une suite à valeurs entières, montrer que si u est convergente, alors u est stationnaire.

Exercice 5:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1) a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l , alors

$$\frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \qquad \text{converge vers } \ l.$$

b) Montrer que la réciproque est fausse.

c) Montrer un résultat similaire avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers ∞.

2) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2, alors

$$\frac{\sum_{k=1}^n u_k v_{n-k}}{n} \qquad \text{converge vers } \ l_1 l_2.$$

3) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} C_n^k u_k}{2^n} \qquad \text{converge.}$$

4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite périodique de période p (cela veut dire que pour tout entier n on a $u_{n+p} = u_n$). Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + \cdots + u_p}{p}.$$

5) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ et u_{n+1}/u_n converge vers l, alors $u_n^{1/n}$ converge vers l.

Exercice 6:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sqrt{n^2-1} - n$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite l.

2) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Déterminer un entier N tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \epsilon$.

Exercice 7:
Soinet $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergente.

1) Montrer que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente

2) Que peut on dire pour $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Distinguer le cas $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$)

Exercice 8:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout k entier supérieur ou égal à 2, $(v_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente mais $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 9:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_{n+1}/u_n|$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que si $l < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge.

2) Montrer que si $l > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ diverge.

3) Montrer grâce à des exemples que si $l = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ peut converger, tendre vers ∞ ou diverger en restant bornée.

4) Etudier la convergence de $u_n = n^2/\lambda^n$, en discutant suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

5)Montrer que si $l < 1$, la suite $(\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 10:
Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$.

1) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et convergente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

3) Calculer $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Trouver l'équivalent de $w_{2n}w_{2n+1}$ et w_{2n+1}/w_{2n} puis w_n quand n tend vers ∞.

2 Suites adjacentes

Exercice 11:
Considérons deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 \leq v_0, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4}.$$

1) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

2) Montrer que $u_n - v_n$ converge géométriquement vers 0.

3) Montrer la convergence des deux suites par deux méthodes (en utilisant 2) et sans utiliser 2)).

Exercice 12:
Soient a et b dans $\mathbb{R}^+$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$in(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$ puis $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq |b_n - a_n|/2$.

3) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée $M(a,b)$.

4) Montrer que pout tout a, b, λ positifs,

$$M(a,b) = M(b,a), \quad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b).$$

Exercice 13:
Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
(on pourra utiliser $\ln(\frac{n+1}{n}) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ ou $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(\frac{x+1}{x})$)

2)Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma \in [2 - \ln(2), 2]$.

3 Suites récurrentes

Exercice 14:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, croissante et tend vers ∞.

Exercice 15:
Etudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

Exercice 16:
1) Tracer le tableau de variation de $f(x) = \sqrt{6-x}$.

2) Montrer qu'on peut définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [-30, 6]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

3) Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2/u_n$.

1) Montrer que u_n tend vers ∞.

2) On pose $v_n = u_n^2/4$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 1$ puis $v_n \geq n$, puis $v_{n+1} - v_n \leq 1 + 1/(4n)$.

b)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq v_n \leq v_2 + n + \ln(n-1)/4$. (Remarquer que $1/k \leq \int_{k-1}^{k} 1/t \, dt$).

c)En déduire l'équivalent de u_n.

Exercice 18:
On pose $f(x) = \sqrt{6+x}$.

1) Montrer qu 'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq -6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) Dresser le tableau de signe de $f(x) - x$.
Montrer que $[-6, 3]$ et $[3, \infty[$ sont stables par f.

3) Si $u_0 \in [-6, 3]$, donner la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Si $u_0 \in [3, \infty[$, donner la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19:
On appelle suite homographique toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$cu_n + d \neq 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et a, b, c, d nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

1) Si l'équation $f(x) = x$ a deux racines distinctes l_1 et l_2 dans $\mathbb{C}$, montrer que

$$v_n = \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$$

est une suite géométrique.
En déduire l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Si l'équation $f(x) = x$ a une unique racine $l \in \mathbb{C}$, montrer que

$$v_n = \frac{1}{u_n - l}$$

est une suite arithmétique.
En déduire l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Calculer et donner la convergence de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}.$$

Exercice 20:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$.
1) Quel est l'ensemble des $u_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2) Quel est l'ensemble des $u_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

Exercice 21:
On appelle suite récurrente double toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{C}^2. \tag{1}$$

1) Montrer que l'ensemble des suites verfiant (**??**) est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2. (Trouver un isomorphisme vers $\mathbb{C}^2$)

2) On appelle résolvante (R) l'équation $x^2 = ax + b$.

a) Montrer que si (R) a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors l'ensemble des suites verifiant (**??**) est égal à

$$\{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

b) Montrer que si (R) a une unique racine r dans $\mathbb{C}$, alors l'ensemble des suites verifiant (**??**) est égal à

$$\{((\lambda + \mu n)r^n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

3) Donner l'expression et étudier la convergence des deux suites récurrentes doubles définies par

a) $u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = \frac{3}{4}u_{n+1} - \frac{1}{8}u_n$.

b) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + (n+1)^2, \quad (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$. (Utiliser $v_n = (n^4 - n^2)/12$)

4 Pour aller plus loin...

Exercice 22:
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $k \in]0, 1[$,

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \le k|x - y|.$$

1) Montrer que la suite récurrente définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

est une suite de Cauchy et converge vers l'unique point fixe de f.

2) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$$

en justifiant au préalable qu'elle est bien définie.

Exercice 23:
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ tel que

$$\tan(x_n) = x_n.$$

Montrer que $y_n = n\pi + \pi/2 - x_n$ tend vers 0 et que $y_n \sim 1/(\pi n)$.
(On rappelle que Arctan(x)+Arctan($1/x$)=$\pi/2$).

Exercice 24:
1) Utiliser une formule de Taylor pour prouver que pour tout $x \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge vers e^x quand n tend vers l'infini.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers l.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \frac{x^k}{k!}$$

converge vers une limite notée $S(x)$.

b) Montrer que $e^{-x}S(x)$ converge vers l quand x tend vers l'infini.

Exercice 25:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose

$$\limsup_{n\to} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{u_k\}$$

$$\liminf_{n\to} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{u_k\}$$

1) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n$ sont toujours définis.

2) Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une autre suite bornée, alors

$$\limsup_{n\to\infty} u_n + v_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

3) Montrer que si $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle qu'il existe f fonction coninue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \qquad \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0.$$

a) Montrer que pout tout $l \in [\liminf_{n\to\infty} u_n, \limsup_{n\to\infty} u_n]$, il existe une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers l.
(Indication : commencer par $l \in \{\liminf_{n\to\infty} u_n, \limsup_{n\to\infty} u_n\}$ puis remarquer que la suite saute avec des pas plus petits que ϵ de la valeur $\liminf_{n\to\infty} u_n$ à $\limsup_{n\to\infty} u_n$)

b) En déduire que tout $l \in [\liminf_{n\to\infty} u_n, \limsup_{n\to\infty} u_n]$ est point fixe de f.

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.