Examen de mi-parcours. Analyse complexe

4 novembre 2005

question de cours :

principe du module maximum et son corollaire.

■

Exercice 1:
On note ρ (.) le rayon de convergence d'une série entière et on considère :
$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^p z^n \qquad V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$

Montrer que $\rho(U) = \rho(S)^p$, $\rho(V) \geq \rho(S)\rho(T)$ (y a t il égalité ?)

Exercice 2:
Quelles sont toutes les fonctions entières dont la partie holmorphe sur $\mathbb{C}$ est :

$$2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

Exercice 3:
Que peut on dire d'une fonction entière f tel qu'il existe un polynôme réel P tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mid f(z) \mid \leq P(\mid z \mid)$.

Pour les groupes 2 et 3 :
Exercice 4:
Soit $r > 0$ et f une fonction holomorphe sur la couronne $C(0,1/r,r) = \{z \in \mathbb{C},\ 1/r <\mid z \mid < r\}$ et vérifiant $\mid f(z) \mid = 1$ si $\mid z \mid = 1$.

a)Montrer qu'on a $\bar{f}(z) = 1/f(1/\bar{z})$ pour tout $z \in C(0,1/r,r)$.
b)Peut on relâcher les hypothèses en demandant seulement $\mid f(z) \mid = 1$ si $z \in \{e^{i2\pi/n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$? (pourquoi?)
c)Montrer que si g et $\bar{g}$ sont des fonctions holomorphes sur Ω ouvert connexe alors g est constante sur Ω.

Pour le groupe 1 :
Exercice 5:
1 - Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. On note $f(x+iy) = P(x,y)+iQ(x,y)$ où P et Q sont des fonctions à valeurs réelles.
a) Montrer que $\Delta P(x,y) = \Delta Q(x,y) = 0$ où $\Delta F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$
b) Montrer l'équivalence entre:

- $Re(f)$ est constante
- $Im(f)$ est constante
- $|f|$ est constante
- f est constante

2 - Soient $f_1,...,f_n$ des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω. On suppose que la fonction $\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2$ est constante. Montrer que toutes les fonctions f_i sont constantes.