Université Paris VI
Master 1 : Introduction au calcul stochastique pour la finance (MM054)

TD 2 : Obligations, contrats futurs et options

On rappelle qu'une *obligation* de *maturité* n, de *coupons* $C_1, \ldots, C_n$ et de *valeur de remboursement* R est un flux dans lequel, si on se place à la date 0, on reçoit C_1 à la date 1, C_2 à la date 2,..., C_n à la date n, plus R à la date n.

En général, les coupons sont calculés à partir d'un nombre N, appelé *nominal* et d'un nombre c appelé *taux de coupon*, tels que pour tout k, $C_k = Nc$.

1. Evaluation d'obligations.

On considère une obligation O de maturité T années. Le taux de coupon est c et le nominal N. La valeur de remboursement est égale R. On note, pour tout n, r_n le taux (à composition annuelle continue) sans risque du zéro coupon de maturité n années à la date actuelle, notée 0.

a. Rappeler le prix d'un zéro coupon de maturité n et de nominal égal à 1 (c'est à dire ce que l'on doit payer à la date 0 pour recevoir 1 à la date n).

b. Que vaut l'obligation O à l'instant 0 ? Dans le cas où r_n est constante et vaut r, avec $c = e^r - 1$ et $R = N$, quelle est cette valeur ? Comment cela se comprend-il ?

c. On suppose maintenant que la courbe des taux zéro coupon est plate à toute date, i.e. $r_n = r$ pour tout n et ne varie pas quand le temps passe. Que vaut l'obligation en $t \in [0, T]$? Comment se comporte le prix de O lorsque r évolue ? La valeur absolue de la dérivée du prix rapportée au prix (i.e. divisée par le prix) est appelée *sensibilité* et est notée S.

d. On suppose toujours que la courbe est plate et ne bougera pas dans l'avenir. Quel montant $M_\tau(r)$ obtenez vous en $\tau \in [0, T]$ si vous achetez l'obligation à maturité T en 0, ré-investissez tous les coupons au taux zéro coupon, et la revendez en τ ?

e. Calculer la durée de détention de l'obligation D telle que la richesse obtenue suivant la stratégie exposée en d. ne soit pas sensible à une petite variation de r (i.e. telle que la dérivée de cette richesse par rapport à r soit nulle) ? On appelle cette durée la *duration* de l'obligation.

f. Quel lien existe-t-il entre sensibilité et duration ?

Solution : a. La composition est annuelle continue, donc le prix est $B_n := e^{-nr_n}$.

b. En 0, elle vaut $P := B_T R + \sum_{n=1}^{T} B_n cN$. Dans le cas où $r_n = r$ pour tout n, $c = e^r - 1$ et $R = N$, cette valeur est N. Cela se comprend bien : il suffit d'investir N à l'instant 0 pour se faire payer cN à la fin de chaque période.

c. L'hypothèse signifie que l'argent rapporte à taux constant r sur toute période et que ce taux ne changera pas. Donc en $t \in [0, T]$, O vaut

$$P_t(r) = \sum_{k=t+1}^{T} \frac{cN}{e^{(k-t)r}} + \frac{R}{e^{(T-t)r}}$$

$$= \frac{R}{e^{(T-t)r}} + \frac{cN}{e^r}\frac{1-e^{-(T-t)r}}{1-e^{-r}} = \frac{1}{e^{(T-t)r}}\left(R - \frac{cN}{e^r-1}\right) + \frac{cN}{e^r-1}.$$

On a, pour tout $k > t$, $\frac{\partial}{\partial r}\frac{cN}{e^{(k-t)r}} < 0$, donc comme on pouvait s'en douter, si les taux d'intérêt augmentent, le prix de l'obligation décroît.

d. Une valeur A en $t \leq \tau$, investie au taux zéro-coupon, rapporte $Ae^{(\tau-t)r}$ en τ. Donc

$$M_\tau(r) = \sum_{t=1}^{\tau} cNe^{(\tau-t)r} + P_\tau(r) = e^{\tau r}\left[\sum_{k=1}^{T}\frac{cN}{e^{kr}} + \frac{R}{e^{Tr}}\right].$$

e. On veut τ tel que $\frac{\partial M_\tau}{\partial r}M_\tau(r) = 0$, ce qui donne

$$\tau = \frac{\sum_{t=1}^{T} tcNe^{-rt} + TRe^{-rT}}{\sum_{t=1}^{T} cNe^{-rt} + Re^{-rT}}.$$

f. On remarque que la sensibilité est égale à la duration.

2. Emission obligataire.

On considère une obligation O de maturité T années qui doit être émise aujourd'hui. Le taux de coupon est c, le nominal N, la valeur de remboursement est égale à R et la valeur d'émission (i.e. le prix) est E. On note r_n le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité n années.

Donner la relation entre E, N, c, R et les r_n.

Solution : Soit, pour tout n, $B_n = (1 + r_n)^{-n}$. C'est ce qu'on doit payer à la date 0 pour avoir 1 à la date n. On a donc

$$E = \sum_{n=1}^{T} B_n cN + RB_T.$$

3. Contrat à terme.

On considère un contrat de vente (i.e. un contrat qui donne le droit de vendre) au prix K d'un actif dans T années, dont l'estimation actuelle du prix dans T années est $S < K$, avec paiement en T. On note r_n le taux annuel (composé) sans risque du zéro coupon de maturité n années. Quel est le prix de revente actuel d'un tel contrat ?

Solution : C'est $\frac{K-S}{(1+r_T)^T}$.

4. Taux de change futur.

On note r_e et r_d les taux étrangers et domestiques à un an, τ_0 le nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère en 0. On considère un contrat par lequel un agent A achète à un agent B le droit de lui échanger, dans un an, N unités de devise étrangère au taux F (i.e. contre FN unités de devise domestique). Combien ce contrat vaut-il aujourd'hui ?

Solution : On sait (feuille de TD 1) que le taux τ_1, dans un an, est donné par la formule : $\tau_1 = \tau_0\frac{1+r_d}{1+r_e}$. Donc le contrat permettra à A de gagner, s'il l'utilise, en devise domestique, $N(F - \tau_1)$. Il vaut donc $1_{\tau_1 < F}N(F - \tau_1)(1 + r_d)^{-1}$.

5. Taux de change futur et fourchette de prix. On note encore r_e et r_d les taux étrangers et domestiques à un an mais cette fois-ci, à la date 0, les taux de changes ne sont plus les mêmes à l'achat et à la vente, i.e.

• τ_0^a = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,

• τ_0^v = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

On note F le taux de change futur, c'est à dire que F est un nombre tel que à la date 1,

• F = nombre d'unités de devise étrangère obtenues contre une unité de devise domestique,

• $1/F$ = nombre d'unités de devise domestique obtenues contre une unité de devise étrangère.

a. Quel lien doit-il y avoir entre τ_0^a et τ_0^v ?

b. Quelle est la fourchette de prix dans laquelle doit se trouver le taux de change futur F en l'absence d'opportunités d'arbitrage ?

Solution : a. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir $\tau_0^a \tau_0^v \leq 1$.

b. Pour simplifier, appelons la monnaie domestique l'euro et la monnaie étrangère de yen.

Considérons la stratégie suivante.

A la date 0, on emprunte 1 euro, que l'on convertit en τ_0^a yens, placés au taux sans risque au Japon ($\Rightarrow$ bilan nul à la date 0).

A la date 1, on récupère $(1+r_e)\tau_0^a$ yens, que l'on convertit en $(1+r_e)\tau_0^a/F$ euros, et on paye $1+r_d$ pour notre emprunt initial.

En absence d'arbitrage, le bilan ne peut être positif, donc $(1+r_e)\tau_0^a/F \leq 1+r_d$, puis $\frac{(1+r_e)\tau_0^a}{1+r_d} \leq F$.

Considérons maintenant la stratégie suivante.

A la date 0, on emprunte 1 yen, que l'on convertit en τ_0^v euros, placé au taux sans risque en Europe ($\Rightarrow$ bilan nul à la date 0).

A la date 1, on récupère $\tau_0^v(1+r_d)$ euros, que l'on convertit en $\tau_0^v(1+r_d)F$ yens, et on paye $1+r_e$ yens pour notre emprunt initial.

En absence d'arbitrage, le bilan ne peut être positif, donc $1+r_e \geq \tau_0^v(1+r_d)F$.

Finalement, on a $\frac{(1+r_e)\tau_0^a}{1+r_d} \leq F \leq \frac{1+r_e}{\tau_0^v(1+r_d)}$.

6. Parité call-put.

On considère un actif financier S de prix S_t à la date t.

a. Un call européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date T (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note C_t le prix à la date t du call de maturité T et de strike K. Quelle est la valeur en T du call (du point de vue de l'acheteur) ?

b. Un put européen est un contrat par lequel le vendeur s'engage à acheter S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date T (maturité) si l'acheteur le désire (exerce son option). On note P_t le prix à la date t du put de maturité T et de strike K. Quelle est la valeur en T du put (du point de vue de l'acheteur) ?

c. On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T. Rappeler ce que ça représente. Montrer que en absence d'opportunités d'arbitrage, $C_t - P_t = S_t - KB_t$. Ce lien est appelé *relation de parité call-put.*

Solution : a. Le prix est $C_T = (S_T - K)^+$.

b. Le prix est $P_T = (K - S_T)^+$

c. B_t est le montant à investir au taux sans risque en t pour obtenir 1 en T.

Supposons que $C_t - P_t < S_t - KB_t$. On réalise alors un arbitrage avec la stratégie suivante.

En t, on achète C, vend P, vend S, et place $KB_t + V$, avec $V = -C_t + P_t + S_t - KB_t > 0$. Le bilan est $-C_t + P_t + S_t - KB_t - V = 0$. En T, on exerce C, l'acheteur de P l'exerce, on achète S, et on a le fruit de notre placement. Le bilan est

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ - S_T + K + V/B_t = V/B_t > 0.$$

Supposons que $C_t - P_t > S_t - KB_t$. On réalise alors un arbitrage avec la stratégie suivante.

En t, on achète P, vend C, achète S, emprunte KB_t, et place V, avec $V = C_t - P_t - S_t + KB_t > 0$. Le bilan est $-P_t + C_t - S_t + KB_t - V = 0$. En T, on exerce P, l'acheteur de C l'exerce, on vend S, et on a le fruit de notre placement. Le bilan est

$$(K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ + S_T - K + V/B_t = V/B_t > 0.$$

7. Option américaine.

On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T. On considère un actif financier S de prix S_t à la date t. Un call américain est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix KB_t (strike) fixé à l'avance à une date t (quelconque) inférieure à T si l'acheteur exerce son option en t. On note C_t le prix à la date t du call européen de maturité T et de strike K et C_t^a le prix du call américain correspondant. On note B_t le prix en t du zéro coupon versant 1 en T.

a. Montrer que en l'absence d'opportunité d'arbitrage, $C_t^a \geq C_t$.

b. On suppose que S_t est aléatoire et que $P(S_T > K) > 0$ et que $P(S_T < K) > 0$. Montrer qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage $C_t > [S_t - KB_t]^+$.

c. En déduire que sous les hypothèses précédentes, il vaut toujours mieux vendre une option américaine plutôt que de l'exercer, et enfin que $C_t^a = C_t$.

Solution : a. Sinon, $C_t > C_t^a$. On réalise alors un arbitrage en vendant des call européens à la date t et en achetant autant de call américains, ce qui constitue une opération positive. On n'exerce nos call américains que à la date T, ce qui constitue une opération neutre.

b. Si $S_t \leq KB_t$, alors $C_t > 0$. En effet, sinon $C_t \leq 0$, l'achat de C en t ne fait pas perdre d'argent, et permet un bilan strictement positif en T avec une probabilité strictement positive. Impossible en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Si $S_t > KB_t$, alors $[S_t - KB_t]^+ = S_t - KB_t$. Supposons $C_t \leq S_t - KB_t$. Alors si en t, on achète C, vend S, et place KB_t, le bilan est positif ou nul, et offre avec une probabilité strictement positive (celle du cas où $S_T < K$) un bilan strictement positif en T : exercice de C si $S_T > K$, rachat de S et fruit K du placement.

c. La vente d'une option américaine en $t < T$ rapporte ce que vaut cette option, soit $V_t := C_t^a$. Or $C_t^a \geq C_t > [S_t - KB_t]^+ =$*ce que rapporte l'exercice de l'option américaine en* t. Il vaut donc toujours mieux vendre une option américaine que l'exercer.