SISM2 MAP 561 - Automatique
Examen du Jeudi 22 Mars 2012

Ugo Boscain et Yacine Chitour

1 Stabilisation d'un système dynamique en dimension trois

On considère le système dynamique (S) défini sur $\mathbf{R}^3$ comme suit,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f_1(x_1) - f_2(x_2) - x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 - f_3(x_3), \tag{1}$$

avec x_i, $1 \leq i \leq 3$, variables réelles, f_i, $1 \leq i \leq 3$, fonctions dérivables telles que $xf_i(x) > 0$ pour tout x non nul.

1. Montrer que (S) a un unique point d'équilibre en l'origine.
2. Pour $1 \leq i \leq 3$, on pose $F_i(x) := \int_0^x f_i(s)ds$. Rappeler pourquoi $F_i(x) > 0$ si x est non nul. Construire, à l'aide des F_i, une fonction $V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ qui soit positive définie et décroissante le long des trajectoires de (S).
3. En déduire que, pour tout $X_0 \in \mathbf{R}^3$, la trajectoire de (S) démarrant de X_0 est définie pour tout $t \geq 0$. Montrer aussi que l'origine est localement asymptotiquement stable.
4. Donner des conditions sur les f_i pour que l'origine soit globalement asymptotiquement stable (et le justifier...) et éventuellement des choix particuliers de f_i pour que l'origine ne soit pas globalement asymptotiquement stable.

2 Commandabilité, stabilisation et observabilité d'un système linéaire

On considère un système mécanique plan formé de deux pendules de masse m, couplés par un ressort de raideur k, et ayant un angle θ_i, $i = 1, 2$ avec la verticale. On supposera que les tiges des pendules ont même longueur l. On note g l'accélération de la pesanteur. Le contrôle est une force u horizontale exercée sur le pendule de droite.

Alors, on peut montrer que les équations du système mécanique sont données par

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta}_1(t) &= A(\sin\theta_2(t) - \sin\theta_1(t))\cos\theta_1(t) - mgl\sin\theta_1(t), \\ ml^2\ddot{\theta}_2(t) &= A(\sin\theta_1(t) - \sin\theta_2(t))\cos\theta_2(t) - mgl\sin\theta_2(t) + u(t)\cos\theta_2(t), \end{aligned}$$

où $A > 0$ est un paramètre lié à la raideur du ressort et à sa position.

Par ailleurs, on pose

$$\alpha := \frac{A}{ml^2} + \frac{g}{l}, \quad \beta := \frac{A}{ml^2}, \quad \gamma := \frac{1}{ml^2}, \quad \delta := \frac{mgl}{A}.$$

On supposera $\delta > 2$.

1. Ecrire les équations précédentes comme un système dynamique (S) du premier ordre. Préciser l'état X de ce système ainsi que la dynamique correspondant à $u = 0$. Quels sont les points d'équilibre ? On note $(X_e, u_e) = (0, 0)$.
2. Ecrire le système linéarisé autour de (X_e, u_e) et montrer qu'il est commandable.
3. (a) Démontrer qu'une condition suffisante sur $K = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ pour que le système (S) bouclé par le feedback $u = KX$ soit localement asymptotiquement stable est

$$k_4 < 0, \quad k_3 < \frac{2\alpha}{\gamma}, \quad \beta\gamma k_1 + \alpha\gamma k_3 + \beta^2 < \alpha^2,$$

$$(\alpha k_4 + \beta k_2)(-\gamma k_4(2\alpha - \gamma k_3) + \gamma(\alpha k_4 + \beta k_2)) < \gamma k_4^2(\alpha\gamma k_3 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta\gamma k_1).$$

   (b) Expliquer comment on construit un tel feedback en plaçant les pôles en -1. Le faire.
4. (a) Le système linéarisé est-il observable avec $y = \theta_1$?
   (b) Est-il possible de stabiliser le système linéarisé en $(0, 0)$ par le retour d'état statique $u = k_0 y$?
   (c) Expliquer soigneusement comment effectuer une stabilisation en $(0, 0)$ par un retour d'état dynamique, en utilisant l'observable précédente. On donnera ensuite des conditions suffisantes sur les matrices de gain assurant la stabilisation.

3 Système linéaire et théorie LQ

Considérer le système commandé linéaire suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= -x + u_1 \\
\dot{z} &= u_2 \\
u_1&, u_2 \in \mathbf{R},
\end{aligned}$$

1. Etudier sa commandabilité.
2. Supposons que l'on dispose de la sortie $y = x_1 + x_2$. Est-ce que le système est observable ?
3. En partant de l'origine, faire un suivi de la trajectoire définie par $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), 3)$ pour $t \in [0, \pi]$ avec les poids $Q = \mathrm{diag}(0, 0, 1)$, $W = \mathrm{diag}(0, 0, 1)$, $U = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$.

4 Système sous-riemannien

Considérer le système commandé non linéaire suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u_1 + u_2 \\
\dot{y} &= u_1 x - u_2 x \\
u_1&, u_2 \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

1. Est-il commandable ?

2. Considérons le côut $\int_0^T (u_1(t)^2 + u_2(t)^2)dt$ où les point initial et final sont fixés ainsi que le temps final T de telle sorte que le Hamiltonien donné par le principe du maximum de Pontryagin (PMP) soit égal à 1/2. (En d'autres termes, le temps final est fixé tel que le long d'une trajectoire optimale on a $u_1^2 + u_2^2 = 1$.)

   2.1 Etudier ses extrêmales anormales.

   2.2 Trouver toutes les extrêmales partant de la source $x^2 + y^2 \geq 1$. On remarquera que ces trajectoires partent du cercle $x^2 + y^2 = 1$, vérifient les conditions de transversalité puis entrent dans le cercle.

   2.3 Etudier l'optimalité de ces trajectoires.

5 Commandabilité non lineaire

Considérer le système commandé suivant

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \\ &\text{où } u_1, u_2 \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \cos(x)e^{-1/x^2} & \text{si } \ x > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Pour toute condition initiale (x_0, y_0), trouver l'ensemble atteignable en temps T c-à-d $\mathcal{A}_{(x_0,y_0)} = \cup_{T\geq 0}\mathcal{A}_{(x_0,y_0)}(T)$. Dans cette question on suppose comme d'habitude $u_1(.), u_2(.) \in L^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

6 Temps minimal linéaire

Considérer le système commandé suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + u \\ \dot{y} &= -x + u \\ u &\in [1, 2]. \end{aligned}$$

1. Est-il commandable ? Dans le cas contraire, étudier son ensemble atteignable à partir de l'origine.
2. Trouver la synthèse optimale à partir de l'origine pour le problème du temps minimal.