

Quelques problèmes posés par la modélisation des métamatériaux

Séminaire des Doctorants du CMAP

A.S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr.

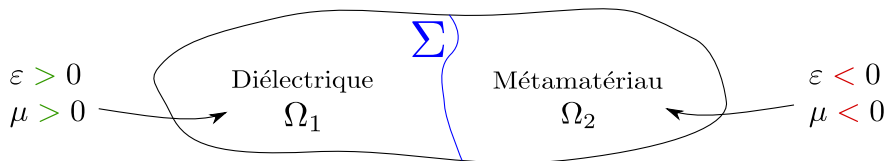
chesnel@ensta-paristech.fr



École Polytechnique, Palaiseau, 2 mars 2011

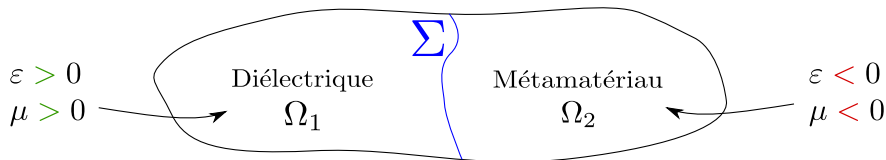
Introduction : position du problème

Problème d'électromagnétisme en régime périodique (à fréquence fixée) dans un milieu hétérogène borné :



Introduction : position du problème

Problème d'électromagnétisme en **régime périodique** (à fréquence fixée) dans un milieu hétérogène borné :



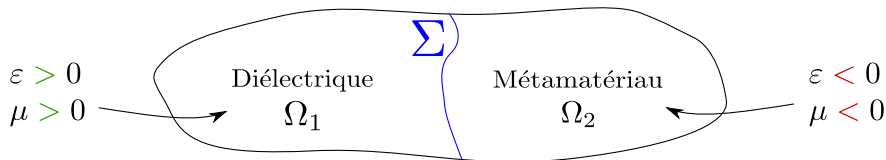
Métamatériaux négatifs

=

Structures à permittivité ε et
perméabilité μ **négatives**

Introduction : position du problème

Problème d'électromagnétisme en **régime périodique** (à fréquence fixée) dans un milieu hétérogène borné :



Métamatériaux négatifs

=

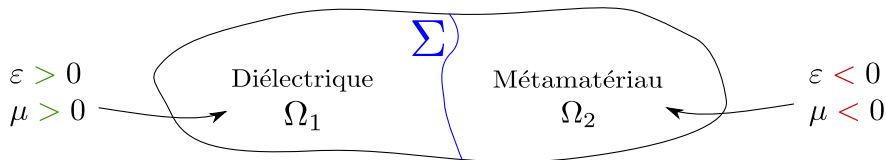
Structures à permittivité ε et
perméabilité μ **négatives**

Alliance

Diélectrique + Métamatériau
 \Rightarrow applications intéressantes
Exemple : la "superlentille"

Introduction : position du problème

Problème d'électromagnétisme en **régime périodique** (à fréquence fixée) dans un milieu hétérogène borné :



Métamatériaux négatifs

=

Structures à permittivité ε et
perméabilité μ **négatives**

Alliance

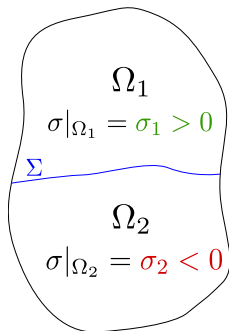
Diélectrique + Métamatériau
 \Rightarrow applications intéressantes
Exemple : la "superlentille"

Cadre mathématique inhabituel pour le problème de transmission à cause du **changement de signe** de ε et μ .

Introduction : modélisation du problème

Difficulté du problème **scalaire** concentrée dans l'étude du problème

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

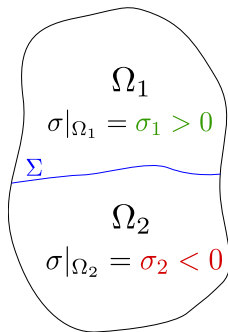


Introduction : modélisation du problème

Difficulté du problème **scalaire** concentrée dans l'étude du problème

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- $H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est la donnée dans $H^{-1}(\Omega)$



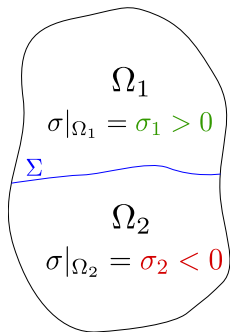
Introduction : modélisation du problème

Difficulté du problème **scalaire** concentrée dans l'étude du problème

$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- $H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est la donnée dans $H^{-1}(\Omega)$

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$



Introduction : modélisation du problème

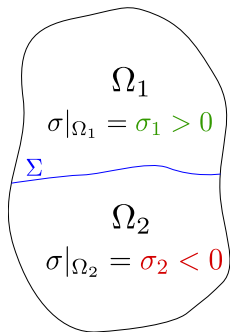
Difficulté du problème **scalaire** concentrée dans l'étude du problème

$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- $H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est la donnée dans $H^{-1}(\Omega)$

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

avec $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v$ et $l(v) = \langle f, v \rangle$.



Introduction : modélisation du problème

Difficulté du problème **scalaire** concentrée dans l'étude du problème

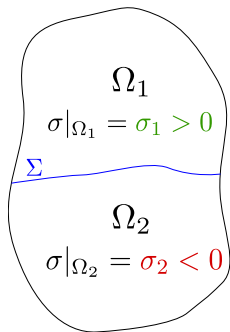
$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- $H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est la donnée dans $H^{-1}(\Omega)$

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

avec $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v$ et $l(v) = \langle f, v \rangle$.

- Pour simplifier les notations, σ_1 et σ_2 **constants** resp. sur Ω_1 et sur Ω_2



Introduction : modélisation du problème

Difficulté du problème **scalaire** concentrée dans l'étude du problème

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

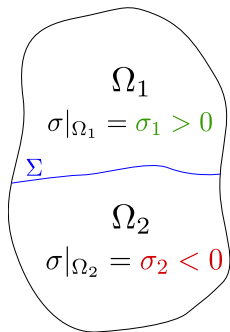
- $H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est la donnée dans $H^{-1}(\Omega)$

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

avec $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v$ et $l(v) = \langle f, v \rangle$.

- Pour simplifier les notations, σ_1 et σ_2 **constants** resp. sur Ω_1 et sur Ω_2

DÉFINITION. Problème (\mathcal{P}) **bien posé** si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, (\mathcal{P}) possède une unique solution dépendant continûment de f .



Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2$$

Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{coercivité}$$

Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{coercivité}$$

Théorème de Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}) bien posé.

Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{coercivité}$$

Théorème de Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}) bien posé.

----- VS. -----

- Le cas σ change de signe :

Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{coercivité}$$

Théorème de Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}) bien posé.

----- VS. -----

- Le cas σ change de signe :

~~$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{perte de coercivité}$$~~

Introduction : difficulté mathématique 1/2

- Le cas classique $\sigma > 0$ partout :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{coercivité}$$

Théorème de Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}) bien posé.

----- VS. -----

- Le cas σ change de signe :

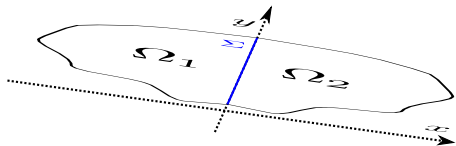
~~$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{perte de coercivité}$$~~

- Si u solution du problème homogène ($f = 0$),

$$\int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 = 0 \quad \not\Rightarrow \quad u = 0.$$

Introduction : difficulté mathématique 2/2

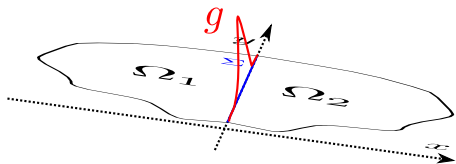
Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.



Introduction : difficulté mathématique 2/2

Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.

1 Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$.

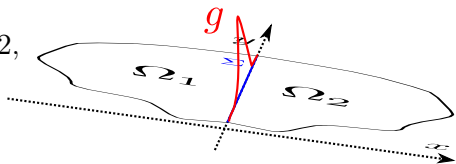


Introduction : difficulté mathématique 2/2

Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.

1 Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Pour $k = 1, 2$,
soit $u_k \in H^1(\Omega_k)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_k & = 0 \\ u_k|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} & = 0 \text{ .} \\ u_k|_{\Sigma} & = g \end{cases}$$

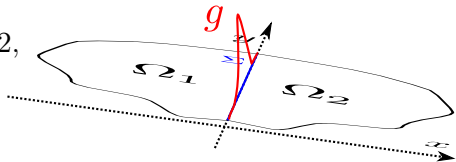


Introduction : difficulté mathématique 2/2

Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.

- 1 Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Pour $k = 1, 2$,
soit $u_k \in H^1(\Omega_k)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_k & = 0 \\ u_k|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} & = 0 \\ u_k|_{\Sigma} & = g \end{cases}$$



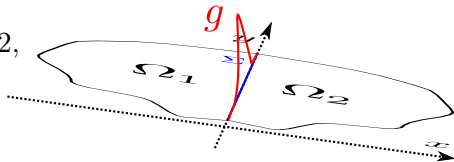
- 2 Par unicité de la solution, $u_2(x, y) = u_1(-x, y)$.

Introduction : difficulté mathématique 2/2

Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.

- 1 Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Pour $k = 1, 2$,
soit $u_k \in H^1(\Omega_k)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_k & = 0 \\ u_k|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} & = 0 \\ u_k|_{\Sigma} & = g \end{cases}$$



- 2 Par unicité de la solution, $u_2(x, y) = u_1(-x, y)$.

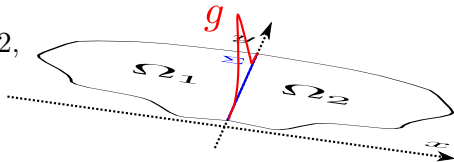
$$\Rightarrow (\text{conservation du flux}) \quad \sigma_1 \partial_x u_1 - \sigma_2 \partial_x u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Introduction : difficulté mathématique 2/2

Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.

- 1 Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Pour $k = 1, 2$,
soit $u_k \in H^1(\Omega_k)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_k & = 0 \\ u_k|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} & = 0 \\ u_k|_{\Sigma} & = g \end{cases}$$



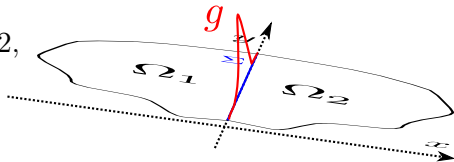
- 2 Par unicité de la solution, $u_2(x, y) = u_1(-x, y)$.
 \Rightarrow (conservation du flux) $\sigma_1 \partial_x u_1 - \sigma_2 \partial_x u_2 = 0$ sur Σ .
- 3 L'élément u de $H_0^1(\Omega)$ défini par $u|_{\Omega_k} = u_k$ vérifie $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0$.

Introduction : difficulté mathématique 2/2

Considérons le cas Ω symétrique et $\sigma_2 = -\sigma_1$.

- 1 Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Pour $k = 1, 2$, soit $u_k \in H^1(\Omega_k)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_k & = 0 \\ u_k|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} & = 0 \\ u_k|_{\Sigma} & = g \end{cases}$$



- 2 Par unicité de la solution, $u_2(x, y) = u_1(-x, y)$.

$$\Rightarrow (\text{conservation du flux}) \quad \sigma_1 \partial_x u_1 - \sigma_2 \partial_x u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

- 3 L'élément u de $H_0^1(\Omega)$ défini par $u|_{\Omega_k} = u_k$ vérifie $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0$.

PROPOSITION. Pour la géométrie symétrique avec $\sigma_2 = -\sigma_1$, le problème homogène (\mathcal{P}) possède une infinité de solutions (mal posé).

Objectifs et plan

1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

- ① La méthode de la T -coercivité
- Principe de la T -coercivité
 - Géométries particulières
 - Géométrie générale
 - Approximation numérique des solutions

Objectifs et plan

1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

3) Revoir la **modélisation** du problème lorsque (\mathcal{P}) n'est pas bien posé.

1 La méthode de la T -coercivité

- Principe de la T -coercivité
- Géométries particulières
- Géométrie générale
- Approximation numérique des solutions

2 Étude dans l'intervalle critique

- Un phénomène de dégénérescence des singularités
- Analogie avec un problème de guide d'ondes
- Méthodes numériques

1 La méthode de la T -coercivité

- Principe de la T -coercivité
- Géométries particulières
- Géométrie générale
- Approximation numérique des solutions

2 Étude dans l'intervalle critique

- Un phénomène de dégénérescence des singularités
- Analogie avec un problème de guide d'ondes
- Méthodes numériques

Principe de la T -coercivité 1/2

Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$

Principe de la T -coercivité 1/2

Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V^T) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, Tv) = l(Tv), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Principe de la T -coercivité 1/2

Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V^T) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, Tv) = l(Tv), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver T tel que a soit T -coercive : $a(u, Tu) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
Dans ce cas, Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}_V^T) (et donc (\mathcal{P}_V)) bien posé.

Principe de la T -coercivité 1/2

Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V^T) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, Tv) = l(Tv), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver T tel que a soit T -coercive : $a(u, Tu) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
Dans ce cas, Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}_V^T) (et donc (\mathcal{P}_V)) bien posé.

1 Définissons $T_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + \dots & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$

Principe de la T -coercivité 1/2

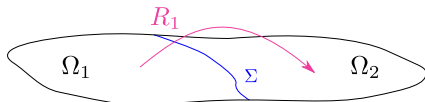
Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V^T) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, Tv) = l(Tv), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver T tel que a soit T -coercive : $a(u, Tu) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
Dans ce cas, Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}_V^T) (et donc (\mathcal{P}_V)) bien posé.

1 Définissons $T_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$, avec

R_1 opérateur de transfert



Principe de la T -coercivité 1/2

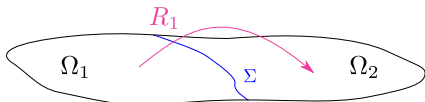
Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V^T) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, Tv) = l(Tv), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver T tel que a soit T -coercive : $a(u, Tu) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
Dans ce cas, Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}_V^T) (et donc (\mathcal{P}_V)) bien posé.

1 Définissons $T_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$, avec

R_1 opérateur de transfert linéaire continu de Ω_1 vers Ω_2



$$\begin{array}{ll} R_1 u_1 = u_1 & \text{sur } \Sigma \\ R_1 u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma \end{array}$$

Principe de la T -coercivité 1/2

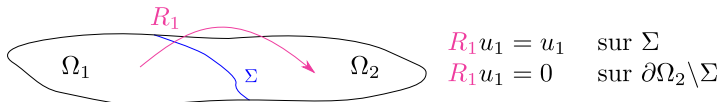
Soit T un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$.

$$(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V^T) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, Tv) = l(Tv), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver T tel que a soit T -coercive : $a(u, Tu) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
Dans ce cas, Lax-Milgram \Rightarrow (\mathcal{P}_V^T) (et donc (\mathcal{P}_V)) bien posé.

1 Définissons $T_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$, avec

R_1 opérateur de transfert linéaire continu de Ω_1 vers Ω_2



2 $T_1 \circ T_1 = Id$ donc T_1 est un **isomorphisme** de $H_0^1(\Omega)$

Principe de la T -coercivité 2/2

3 On a $a(u, T_1 u) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla (R_1 u_1)$

Principe de la T -coercivité 2/2

3 On a $a(u, T_1 u) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla (R_1 u_1)$

Inégalité de Young \Rightarrow a est T -coercive lorsque $\sigma_1 > \|R_1\|^2 |\sigma_2|$.

Principe de la T -coercivité 2/2

③ On a $a(u, T_1 u) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla (R_1 u_1)$

Inégalité de Young \Rightarrow a est T -coercive lorsque $\sigma_1 > \|R_1\|^2 |\sigma_2|$.

④ En travaillant avec $T_2 u = \begin{cases} u_1 - 2R_2 u_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$, où $R_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$,

on prouve que a est T -coercive lorsque $|\sigma_2| > \|R_2\|^2 \sigma_1$.

Principe de la T -coercivité 2/2

3 On a $a(u, T_1 u) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla (R_1 u_1)$

Inégalité de Young \Rightarrow a est T -coercive lorsque $\sigma_1 > \|R_1\|^2 |\sigma_2|$.

4 En travaillant avec $T_2 u = \begin{cases} u_1 - 2R_2 u_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$, où $R_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$,

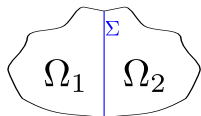
on prouve que a est T -coercive lorsque $|\sigma_2| > \|R_2\|^2 \sigma_1$.

5 Conclusion :

THÉORÈME. Si le **contraste** $\kappa_{\sigma} = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-\|R_2\|^2; -1/\|R_1\|^2]$ (**intervalle critique**) alors le problème (\mathcal{P}) possède une **unique solution dépendant continûment de f** .

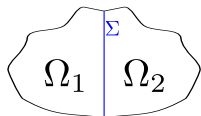
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



Choix de R_1, R_2 ? 1/2

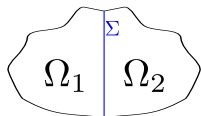
- Ouvert symétrique :



symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
 (\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

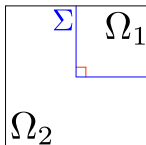
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



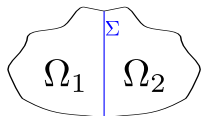
symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- ▶ Coin droit :



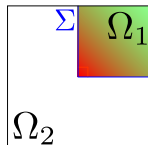
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
 (\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

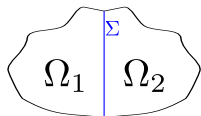
- ▶ Coin droit :



Action de R_1

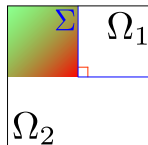
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

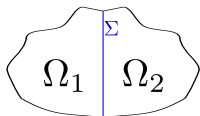
- ▶ Coin droit :



Action de R_1

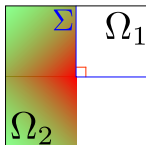
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
 (\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

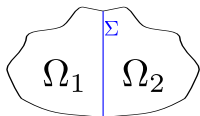
- ▶ Coin droit :



Action de R_1

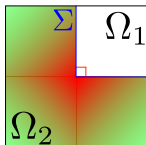
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

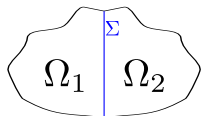
- ▶ Coin droit :



Action de R_1

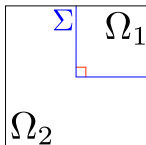
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
 (\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

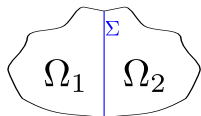
- ▶ Coin droit :



R_1 et R_2 obtenus à partir
des symétries S_x et S_y
 (\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$

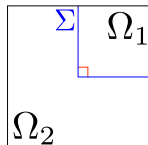
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



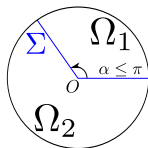
symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- ▶ Coin droit :



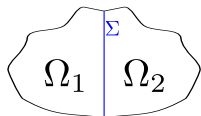
R_1 et R_2 obtenus à partir
des symétries S_x et S_y
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$

- ▶ Coin quelconque :



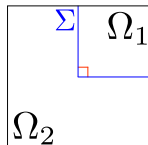
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



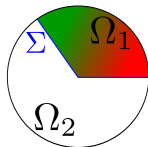
symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- ▶ Coin droit :



R_1 et R_2 obtenus à partir
des symétries S_x et S_y
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$

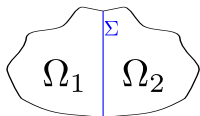
- ▶ Coin quelconque :



Action de R_1

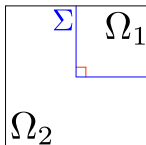
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



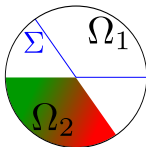
symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- ▶ Coin droit :



R_1 et R_2 obtenus à partir
des symétries S_x et S_y
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$

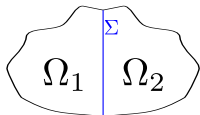
- ▶ Coin quelconque :



Action de R_1

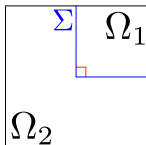
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



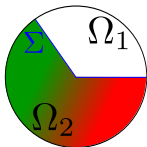
symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- ▶ Coin droit :



R_1 et R_2 obtenus à partir
des symétries S_x et S_y
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$

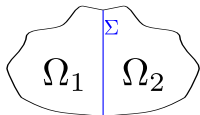
- ▶ Coin quelconque :



Action de R_1

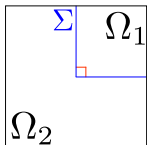
Choix de R_1, R_2 ? 1/2

- ▶ Ouvert symétrique :



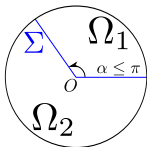
symétrie par rapport à Σ
 $R_1 = S_\Sigma$ et $R_2 = S_\Sigma$
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- ▶ Coin droit :



R_1 et R_2 obtenus à partir
des symétries S_x et S_y
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-3; -1/3]$

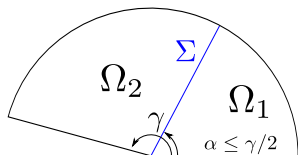
- ▶ Coin quelconque :



R_1 et R_2 obtenus à partir
de symétrie/dilatation en θ
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin \left[-\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}; -\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}\right]$

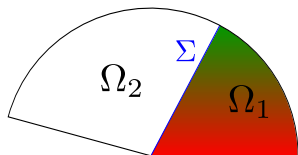
Choix de R_1, R_2 ? 2/2

- Coin extérieur :



Choix de R_1, R_2 ? 2/2

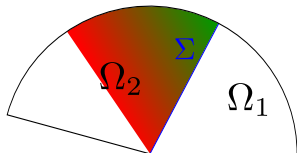
- Coin extérieur :



Action de R_1

Choix de R_1, R_2 ? 2/2

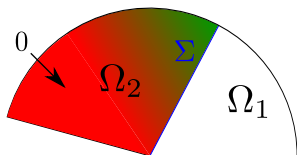
- Coin extérieur :



Action de R_1

Choix de R_1, R_2 ? 2/2

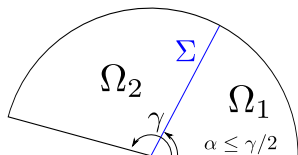
► Coin extérieur :



Action de R_1

Choix de R_1, R_2 ? 2/2

► Coin extérieur :



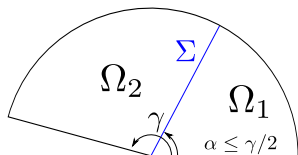
R_1 : symétrie en θ + prolongement par 0

R_2 : symétrie + dilatation en θ

(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}; -1]$

Choix de R_1, R_2 ? 2/2

- Coin extérieur :

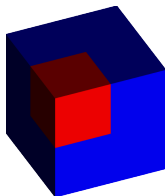


R_1 : symétrie en θ + prolongement par 0

R_2 : symétrie + dilatation en θ

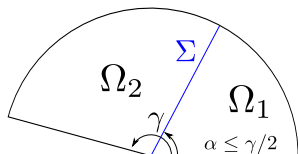
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}; -1]$

- Cube de Fichera :



Choix de R_1, R_2 ? 2/2

- Coin extérieur :

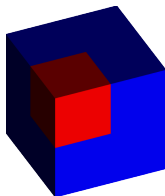


R_1 : symétrie en θ + prolongement par 0

R_2 : symétrie + dilatation en θ

(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}; -1]$

- Cube de Fichera :



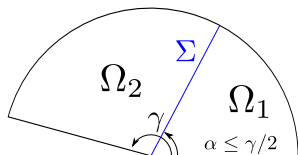
R_1 et R_2 obtenus à partir de symétries

(\mathcal{P}) bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \notin [-7; -1/7]$

(rapport des volumes)

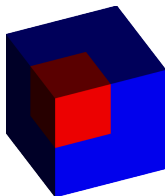
Choix de R_1, R_2 ? 2/2

- Coin extérieur :



R_1 : symétrie en θ + prolongement par 0
 R_2 : symétrie + dilatation en θ
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftarrow \kappa_\sigma \notin [-\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}; -1]$

- Cube de Fichera :



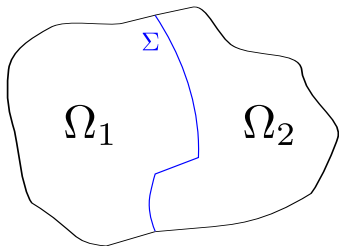
R_1 et R_2 obtenus à partir de symétries
(\mathcal{P}) bien posé $\Leftarrow \kappa_\sigma \notin [-7; -1/7]$
(rapport des volumes)

- Plus généralement, R_1 et R_2 doivent minimiser

$$\sup_{u_1} \frac{\|R_1 u_1\|_{H_0^1(\Omega_2)}}{\|u_1\|_{H_0^1(\Omega_1)}} \quad \text{et} \quad \sup_{u_2} \frac{\|R_2 u_2\|_{H_0^1(\Omega_1)}}{\|u_2\|_{H_0^1(\Omega_2)}}.$$

Géométrie générale

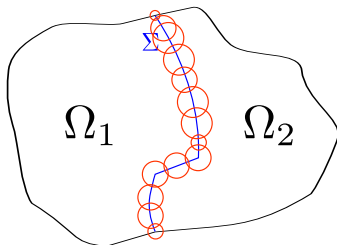
Idée : raisonner par **localisation**



Géométrie générale

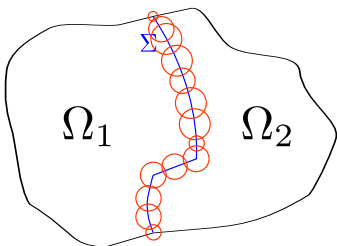
Idée : raisonner par **localisation**

- 1 Partition de l'unité.



Géométrie générale

Idée : raisonner par **localisation**



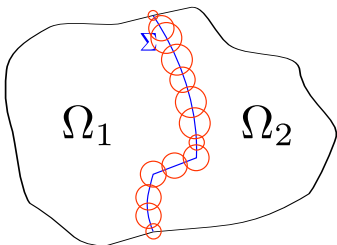
① Partition de l'unité.

② Inversion locale.

On utilise les résultats obtenus pour les cas particuliers.

Géométrie générale

Idée : raisonner par **localisation**



① Partition de l'unité.

② Inversion locale.

On utilise les résultats obtenus pour les cas particuliers.

③ Estimation *a priori*.

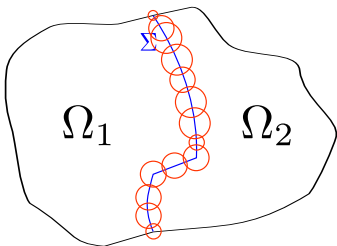
Si $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C (\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

+ injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

Géométrie générale

Idée : raisonner par **localisation**



① Partition de l'unité.

② Inversion locale.

On utilise les résultats obtenus pour les cas particuliers.

③ Estimation *a priori*.

Si $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

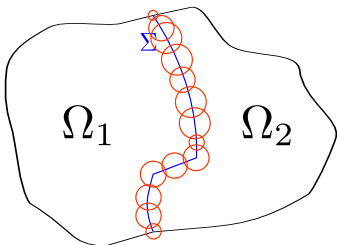
$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C (\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

+ injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

THÉORÈME. Si le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_-) alors le problème (\mathcal{P}) est **bien posé au sens de Fredholm** (possibilité d'existence d'un noyau de dimension finie).

Géométrie générale

Idée : raisonner par **localisation**



① Partition de l'unité.

② Inversion locale.

On utilise les résultats obtenus pour les cas particuliers.

③ Estimation *a priori*.

Si $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C (\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

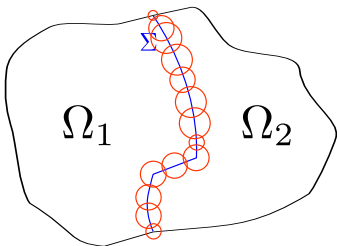
+ injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

THÉORÈME. Si le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_-) alors le problème (\mathcal{P}) est **bien posé au sens de Fredholm** (possibilité d'existence d'un noyau de dimension finie).

► L'intervalle I_Σ contient toujours -1 .

Géométrie générale

Idee : raisonner par **localisation**



① Partition de l'unité.

② Inversion locale.

On utilise les résultats obtenus pour les cas particuliers.

③ Estimation *a priori*.

Si $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C (\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

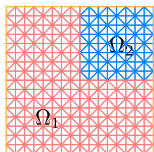
+ injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

THÉORÈME. Si le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_-) alors le problème (\mathcal{P}) est **bien posé au sens de Fredholm** (possibilité d'existence d'un noyau de dimension finie).

► L'intervalle I_Σ contient toujours -1 .

► Si l'interface Σ est **régulière** sans extrémité (\mathcal{C}^1), alors $I_\Sigma = \{-1\}$.

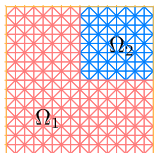
Méthode des éléments finis



Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

Méthode des éléments finis

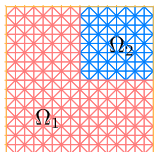


Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

Méthode des éléments finis



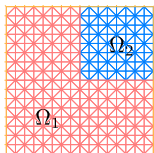
Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

$(\mathcal{P}_h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$

Méthode des éléments finis



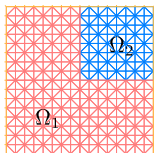
Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

$$(\mathcal{P}_h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, T v_h) = l(T v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Méthode des éléments finis



Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

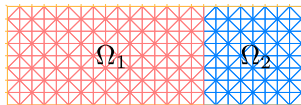
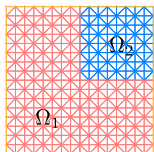
1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

$$(\mathcal{P}_h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, T v_h) = l(T v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Méthode des éléments finis



Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

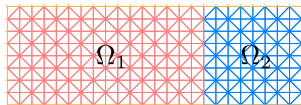
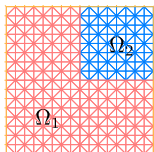
$$(\mathcal{P}_h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, T v_h) = l(T v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(vrai aussi si maillage localement stable par T)

Méthode des éléments finis



Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

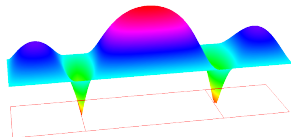
1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

$$(\mathcal{P}_h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, T v_h) = l(T v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

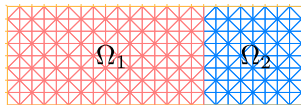
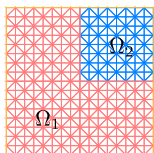
Lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(vrai aussi si maillage localement stable par T)



Méthode des éléments finis



Espace de discrétisation :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \text{ affine sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega)$$

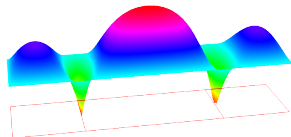
1 Si $T(V_h) \subset V_h$ (maillage stable par T)

$$(\mathcal{P}_h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, T v_h) = l(T v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(vrai aussi si maillage localement stable par T)



2 Si $T(V_h) \not\subset V_h$, plus délicat : interpolation de T , méthode de pénalisation, ... (travail en cours)

Conclusion intermédiaire

Rappel des questions :

1) Trouver un critère sur σ et la géométrie de l'interface pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

Conclusion intermédiaire

Rappel des questions :

1) Trouver un critère sur σ et la géométrie de l'interface pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

✓ (\mathcal{P}) est bien posé lorsque $\kappa_\sigma \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_- contenant -1).

Conclusion intermédiaire

Rappel des questions :

1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

✓ (\mathcal{P}) est **bien posé** lorsque $\kappa_\sigma \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_- contenant -1).

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

Conclusion intermédiaire

Rappel des questions :

1) Trouver un critère sur σ et la géométrie de l'interface pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

✓ (\mathcal{P}) est bien posé lorsque $\kappa_\sigma \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_- contenant -1).

2) Déterminer une méthode d'approximation numérique de cette solution.

✓ Méthode des éléments finis pour approcher la solution
⇒ convergence justifiée par la T -coercivité

Conclusion intermédiaire

Rappel des questions :

1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

✓ (\mathcal{P}) est **bien posé** lorsque $\kappa_\sigma \notin I_\Sigma$ (intervalle de \mathbb{R}_- contenant -1).

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

✓ Méthode des **éléments finis** pour approcher la solution
⇒ convergence justifiée par la **T -coercivité**

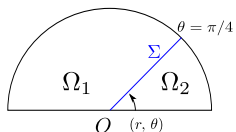
3) Que se passe-t-il dans l'intervalle critique ?

- 1 La méthode de la T -coercivité
 - Principe de la T -coercivité
 - Géométries particulières
 - Géométrie générale
 - Approximation numérique des solutions

- 2 Étude dans l'intervalle critique
 - Un phénomène de dégénérescence des singularités
 - Analogie avec un problème de guide d'ondes
 - Méthodes numériques

Présentation des idées

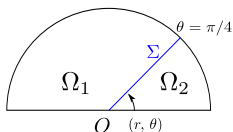
Fixons Ω :



- Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.

Présentation des idées

Fixons Ω :

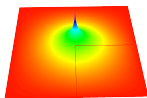
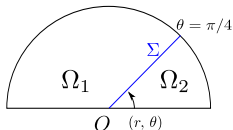


- Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.
Si $f \in L^2(\Omega)$, l'analyse de Mellin montre que

$$u = u_{reg} + c s \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} u_{reg}|_{\Omega_k} \in H^2(\Omega_k) \end{array} \right.$$

Présentation des idées

Fixons Ω :

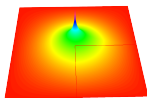
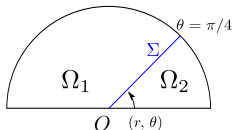


- Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.
Si $f \in L^2(\Omega)$, l'analyse de Mellin montre que

$$u = u_{reg} + c s \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{reg}|_{\Omega_k} \in H^2(\Omega_k) \\ s(r, \theta) = r^{\lambda_1} \varphi_1(\theta) \in H^1(\Omega) \quad (\Re \lambda_1 > 0) \end{array} \right. .$$

Présentation des idées

Fixons Ω :



► Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.

Si $f \in L^2(\Omega)$, l'analyse de Mellin montre que

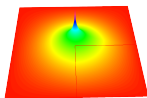
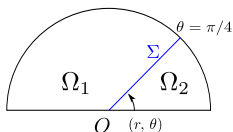
$$u = u_{reg} + c s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_{reg}|_{\Omega_k} \in H^2(\Omega_k) \\ s(r, \theta) = r^{\lambda_1} \varphi_1(\theta) \in H^1(\Omega) \quad (\Re \lambda_1 > 0) \end{cases} .$$

----- VS. -----

► Pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$,

Présentation des idées

Fixons Ω :



► Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.

Si $f \in L^2(\Omega)$, l'analyse de Mellin montre que

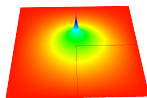
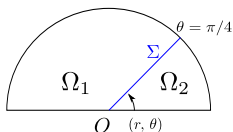
$$u = u_{reg} + c s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_{reg}|_{\Omega_k} \in H^2(\Omega_k) \\ s(r, \theta) = r^{\lambda_1} \varphi_1(\theta) \in H^1(\Omega) \quad (\Re \lambda_1 > 0) \end{cases} .$$

----- VS. -----

► Pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$, $\Re \pm \lambda_1 = 0 \Rightarrow s, s^* \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$.

Présentation des idées

Fixons Ω :



- Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.
Si $f \in L^2(\Omega)$, l'analyse de Mellin montre que

$$u = u_{reg} + c s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_{reg}|_{\Omega_k} \in H^2(\Omega_k) \\ s(r, \theta) = r^{\lambda_1} \varphi_1(\theta) \in H^1(\Omega) \quad (\Re \lambda_1 > 0) \end{cases} .$$

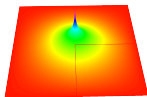
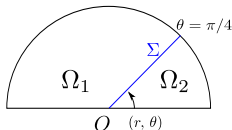
----- VS. -----

- Pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$, $\Re \pm \lambda_1 = 0 \Rightarrow s, s^* \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$.

~~$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C (\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \quad \text{estimation a priori}$$~~

Présentation des idées

Fixons Ω :



- Pour $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$, problème (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.
Si $f \in L^2(\Omega)$, l'analyse de Mellin montre que

$$u = u_{reg} + c s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_{reg}|_{\Omega_k} \in H^2(\Omega_k) \\ s(r, \theta) = r^{\lambda_1} \varphi_1(\theta) \in H^1(\Omega) \quad (\Re \lambda_1 > 0) \end{cases} .$$

----- VS. -----

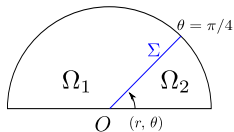
- Pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$, $\Re \pm \lambda_1 = 0 \Rightarrow s, s^* \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$.

~~$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C (\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \quad \text{estimation a priori}$$~~

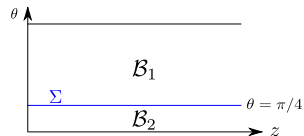
PROPOSITION. Pour $\kappa_\sigma \in [-1; -1/3]$, le problème (\mathcal{P}) n'est pas bien posé au sens de Fredholm.

Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω

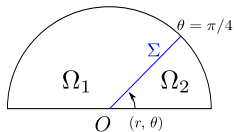


Demi-bande \mathcal{B}



Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω

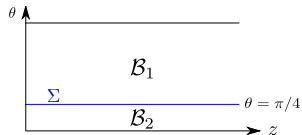


$$(z, \theta) = (-\ln r, \theta)$$

A diagram of a semi-band \mathcal{B} in the complex plane. The horizontal axis is z and the vertical axis is θ . A blue line Σ is drawn at $\theta = \pi/4$. The region is divided into two sub-regions, \mathcal{B}_1 and \mathcal{B}_2 . A yellow arrow points from the origin towards the right, and a purple arrow points from the right towards the origin, both along the line Σ .

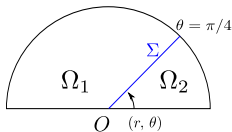
$$(r, \theta) = i(e^{-z}, \theta)$$

Demi-bande \mathcal{B}



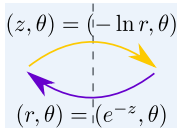
Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω

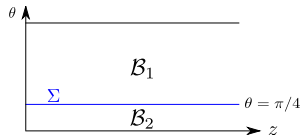


Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = f$$



Demi-bande \mathcal{B}

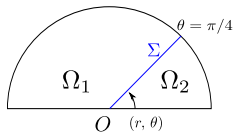


Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-(\sigma \partial_z^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω



Équation de Helmholtz :

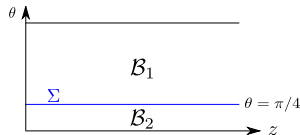
$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = f$$

Singularités dans le secteur

$$s(r, \theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$$

$$(z, \theta) = (-\ln r, \theta)$$
$$(r, \theta) = (e^{-z}, \theta)$$

Demi-bande \mathcal{B}



Équation de Helmholtz :

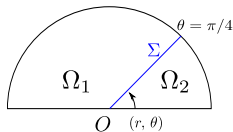
$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-(\sigma \partial_z^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

Modes dans la bande

$$m(z, \theta) = e^{-\lambda z} \varphi(\theta)$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω



Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = f$$

Singularités dans le secteur

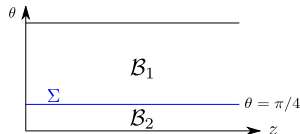
$$s(r, \theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$$

$$s \in H^1(\Omega)$$

$$(z, \theta) = (-\ln r, \theta)$$
$$(r, \theta) = (e^{-z}, \theta)$$

$$\Re \lambda > 0$$

Demi-bande \mathcal{B}



Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-(\sigma \partial_z^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

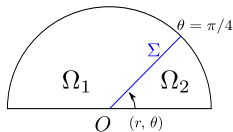
Modes dans la bande

$$m(z, \theta) = e^{-\lambda z} \varphi(\theta)$$

m est évanescent

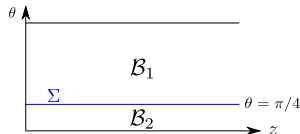
Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω



$$(z, \theta) = (-\ln r, \theta)$$
$$(r, \theta) = (e^{-z}, \theta)$$

Demi-bande \mathcal{B}



Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = f$$

Singularités dans le secteur

$$s(r, \theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$$

$$s \in H^1(\Omega)$$

$$s \notin H^1(\Omega)$$

$$\Re \lambda > 0$$

$$\Re \lambda \leq 0$$

Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-(\sigma \partial_z^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

Modes dans la bande

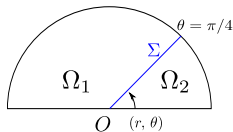
$$m(z, \theta) = e^{-\lambda z} \varphi(\theta)$$

m est évanescent

m est propagatif

Analogie avec un problème de guide d'ondes 1/2

Secteur borné Ω



Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = f$$

Singularités dans le secteur

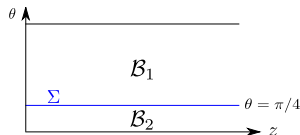
$$s(r, \theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$$

$$s \in H^1(\Omega) \quad \Re \lambda > 0$$

$$s \notin H^1(\Omega) \quad \Re \lambda \leq 0$$

$$(z, \theta) = (-\ln r, \theta)$$
$$(r, \theta) = (e^{-z}, \theta)$$

Demi-bande \mathcal{B}



Équation de Helmholtz :

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u)}_{-(\sigma \partial_z^2 + \partial_\theta \sigma \partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

Modes dans la bande

$$m(z, \theta) = e^{-\lambda z} \varphi(\theta)$$

m est évanescent

m est propagatif

Analogie avec un problème de guide d'ondes 2/2

Unicité dans l'espace des **modes sortants** : $u = c \varphi_1 e^{\lambda_1 z} + u_e$ où u_e **évanescent** en $+\infty$ ($e^{-\beta z} u_e \in H^1(\mathcal{B})$) pour un certain $\beta > 0$.

Analogie avec un problème de guide d'ondes 2/2

Unicité dans l'espace des **modes sortants** : $u = c \varphi_1 e^{\lambda_1 z} + u_e$ où u_e **évanescent** en $+\infty$ ($e^{-\beta z} u_e \in H^1(\mathcal{B})$) pour un certain $\beta > 0$.

$$\text{Soit } \begin{cases} W_{-\beta} & = \{v \mid e^{\beta z} v \in H_0^1(\mathcal{B})\} \\ W^+ & = \text{vect} (\varphi_1 e^{\lambda_1 z}) \oplus W_{-\beta} \end{cases}$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes 2/2

Unicité dans l'espace des **modes sortants** : $u = c \varphi_1 e^{\lambda_1 z} + u_e$ où u_e **évanescent** en $+\infty$ ($e^{-\beta z} u_e \in H^1(\mathcal{B})$) pour un certain $\beta > 0$.

$$\text{Soit } \begin{cases} W_{-\beta} &= \{v \mid e^{\beta z} v \in H_0^1(\mathcal{B})\} \\ W^+ &= \text{vect} (\varphi_1 e^{\lambda_1 z}) \oplus W_{-\beta} \end{cases}$$

THÉORÈME. Soit $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$ et $0 < \beta < 2$. L'opérateur $\text{div}(\sigma \nabla \cdot)$ est un **isomorphisme** de W^+ dans W_β^* .

Analogie avec un problème de guide d'ondes 2/2

Unicité dans l'espace des **modes sortants** : $u = c \varphi_1 e^{\lambda_1 z} + u_e$ où u_e **évanescent** en $+\infty$ ($e^{-\beta z} u_e \in H^1(\mathcal{B})$) pour un certain $\beta > 0$.

$$\text{Soit } \begin{cases} W_{-\beta} &= \{v \mid e^{\beta z} v \in H_0^1(\mathcal{B})\} \\ W^+ &= \text{vect} (\varphi_1 e^{\lambda_1 z}) \oplus W_{-\beta} \end{cases}$$

THÉORÈME. Soit $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$ et $0 < \beta < 2$. L'opérateur $\text{div}(\sigma \nabla \cdot)$ est un **isomorphisme** de W^+ dans W_β^* .

- Idées de la preuve :* 1) Décomposition sur les modes (♠ délicate à cause du changement de signe de σ).
- 2) Processus d'absorption limite pour sélectionner le **mode sortant**.

Analogie avec un problème de guide d'ondes 2/2

Unicité dans l'espace des **modes sortants** : $u = c \varphi_1 e^{\lambda_1 z} + u_e$ où u_e **évanescence** en $+\infty$ ($e^{-\beta z} u_e \in H^1(\mathcal{B})$) pour un certain $\beta > 0$.

$$\text{Soit } \left\{ \begin{array}{l} W_{-\beta} = \{v \mid e^{\beta z} v \in H_0^1(\mathcal{B})\} \\ W^+ = \text{vect}(\varphi_1 e^{\lambda_1 z}) \oplus W_{-\beta} \end{array} \right.$$

THÉORÈME. Soit $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$ et $0 < \beta < 2$. L'opérateur $\text{div}(\sigma \nabla \cdot)$ est un **isomorphisme** de W^+ dans W_β^* .

Idées de la preuve : 1) Décomposition sur les modes (**♠** délicate à cause du changement de signe de σ).

2) Processus d'absorption limite pour sélectionner le **mode sortant**.

$$\text{Soit } \left\{ \begin{array}{l} V_{-\beta} = \{v \mid r^{-\beta} \nabla v \in (L^2(\Omega))^2, r^{-\beta-1} v \in L^2(\Omega) \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0\} \\ V^+ = \text{vect}(\varphi_1 r^{\lambda_1}) \oplus V_{-\beta} \end{array} \right.$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes 2/2

Unicité dans l'espace des **modes sortants** : $u = c\varphi_1 e^{\lambda_1 z} + u_e$ où u_e **évanescent** en $+\infty$ ($e^{-\beta z} u_e \in H^1(\mathcal{B})$) pour un certain $\beta > 0$.

$$\text{Soit } \left\{ \begin{array}{l} W_{-\beta} = \{v \mid e^{\beta z} v \in H_0^1(\mathcal{B})\} \\ W^+ = \text{vect}(\varphi_1 e^{\lambda_1 z}) \oplus W_{-\beta} \end{array} \right.$$

THÉORÈME. Soit $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$ et $0 < \beta < 2$. L'opérateur $\text{div}(\sigma \nabla \cdot)$ est un **isomorphisme** de W^+ dans W_β^* .

Idées de la preuve : 1) Décomposition sur les modes (**♠** délicate à cause du changement de signe de σ).

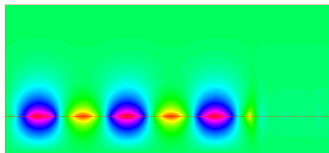
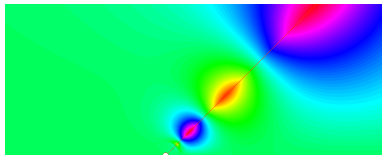
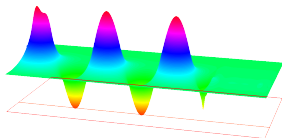
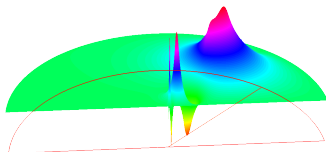
2) Processus d'absorption limite pour sélectionner le **mode sortant**.

$$\text{Soit } \left\{ \begin{array}{l} V_{-\beta} = \{v \mid r^{-\beta} \nabla v \in (L^2(\Omega))^2, r^{-\beta-1} v \in L^2(\Omega) \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0\} \\ V^+ = \text{vect}(\varphi_1 r^{\lambda_1}) \oplus V_{-\beta} \end{array} \right.$$

THÉORÈME. Soit $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$ et $0 < \beta < 2$. L'opérateur $\text{div}(\sigma \nabla \cdot)$ est un **isomorphisme** de V^+ dans V_β^* .

Méthodes numériques

- ▶ On utilise des **PMLs** (*Perfectly Matched Layers*) pour border \mathcal{B}
+ **éléments finis** dans la bande tronquée



$$\kappa_\sigma = 1/1.05$$

Un phénomène de trou noir dans l'intervalle critique

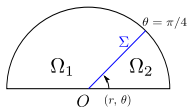
$$\kappa_{\sigma} = -1/1.3 \in] - 1; -1/3[$$

(Film en attente ...)

Conclusion : résumé des résultats

Problème

(\mathcal{P}) | Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans Ω .

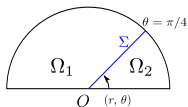


Conclusion : résumé des résultats

Problème

Objectifs

(\mathcal{P}) | Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans Ω .



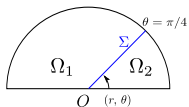
- 1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.
- 2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.
- 3) Revoir la **modélisation** du problème lorsque (\mathcal{P}) n'est pas bien posé.

Conclusion : résumé des résultats

Problème

Objectifs

(\mathcal{P}) | Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans Ω .



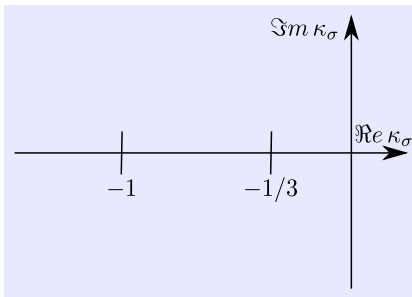
1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

3) Revoir la **modélisation** du problème lorsque (\mathcal{P}) n'est pas bien posé.

Résultats

■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**Lax-Milgram**) (E.F.)

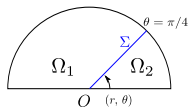


Conclusion : résumé des résultats

Problème

Objectifs (\mathcal{P})

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans Ω .



1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

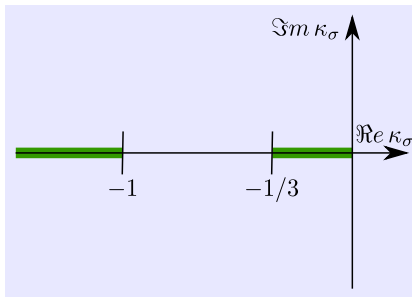
2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

3) Revoir la **modélisation** du problème lorsque (\mathcal{P}) n'est pas bien posé.

Résultats

■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**Lax-Milgram**) (E.F.)

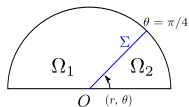
■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}^* \setminus [-1; -1/3]$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**T-coercivité**) (E.F.)



Conclusion : résumé des résultats

Problème

Objectifs (\mathcal{P}) | Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans Ω .



1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

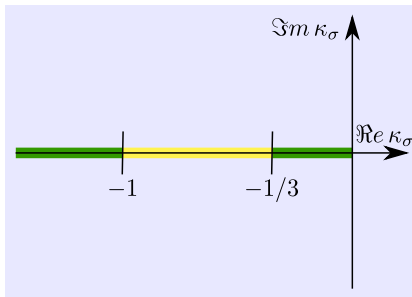
3) Revoir la **modélisation** du problème lorsque (\mathcal{P}) n'est pas bien posé.

Résultats

■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**Lax-Milgram**) (E.F.)

■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus [-1; -1/3]$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**T-coercivité**) (E.F.)

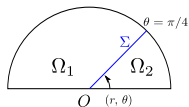
■ Pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$, (\mathcal{P}) pas bien posé au sens de Fredholm dans $H_0^1(\Omega)$ mais bien posé dans V^+ (PMLs)



Conclusion : résumé des résultats

Problème

Objectifs (\mathcal{P}) | Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans Ω .



1) Trouver un **critère** sur σ et la **géométrie de l'interface** pour assurer que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

2) Déterminer une méthode d'**approximation numérique** de cette solution.

3) Revoir la **modélisation** du problème lorsque (\mathcal{P}) n'est pas bien posé.

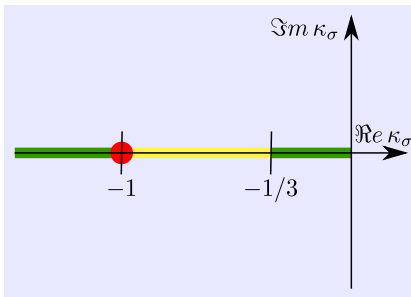
Résultats

■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**Lax-Milgram**) (E.F.)

■ Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus [-1; -1/3]$, (\mathcal{P}) bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (**T-coercivité**) (E.F.)

■ Pour $\kappa_\sigma \in]-1; -1/3[$, (\mathcal{P}) pas bien posé au sens de Fredholm dans $H_0^1(\Omega)$ mais bien posé dans V^+ (PMLs)

● $\kappa_\sigma = -1$, (\mathcal{P}) mal posé dans $H_0^1(\Omega)$



Conclusion : généralisations et perspectives

Généralisations

- T -coercivité fonctionne également pour σ non constant (L^∞).
- Méthode de la T -coercivité exploitable pour d'autres problèmes (Maxwell, problème de transmission intérieur, ...).

Conclusion : généralisations et perspectives

Généralisations





- T -coercivité fonctionne également pour σ non constant (L^∞).
- Méthode de la T -coercivité exploitable pour d'autres problèmes (Maxwell, problème de transmission intérieur, ...).

Perspectives

- Preuve de la convergence de la méthode des éléments finis incomplète en dehors de l'intervalle critique.
- Analyse asymptotique lorsqu'on régularise l'interface ?
- Le cas $\kappa_\sigma = -1$ est encore incompris (physiquement et mathématiquement) : apparition de singularités sur toute l'interface. Peut-on définir un cadre dans lequel ce problème est bien posé ?

Merci

Merci

-  A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *Optimality of T -coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials*, [soumis](#).
-  A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C.M. Zwölf, *Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients*, *J. Comput. Appl. Math.*, 234 :1912–1919, 2010, [Corrigendum J. Comput. Appl. Math., 234 :2616, 2010.](#)
-  V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, *Mathematical Surveys and Monographs*, AMS, 52, Providence, 1997.
-  S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*, *Expositions in Mathematics*, de Gruyter, 13, Berlin, Allemagne, 1994.