

Méthode des bases réduites dans un guide d'ondes

Sujet proposé par Lucas Chesnel
Lucas.Chesnel@polytechnique.edu¹

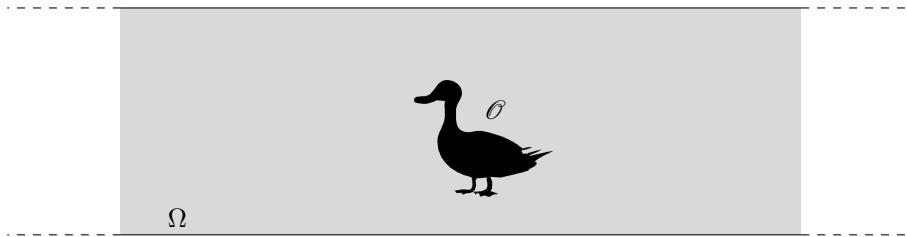


FIGURE 1 – Guide d'ondes comportant un objet pénétrable.

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d'ondes électromagnétiques dans un conduit contenant un objet pénétrable \mathcal{O} (voir Figure 1). Nous travaillons en régime harmonique en temps et pour simplifier, nous considérons une situation où l'analyse des équations de Maxwell se réduit à l'étude du problème scalaire en deux dimensions

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 \varepsilon u = f & \text{dans } \Omega := \{z = (x, y) \in \mathbb{R} \times (0; 1)\} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Ici $\omega \in \mathbb{R}$ correspond à la fréquence de travail et $f \in L^2(\Omega)$ est un terme source. D'autre part la permittivité $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ est à valeurs réelles, telle que $\varepsilon \geq 0$ dans Ω et $\varepsilon = 1$ pour $|x| \geq L$, $L > 0$ étant une constante donnée.

L'objectif est d'identifier des obstacles pour lesquels l'énergie d'une onde incidente est complètement transmise à travers la structure ou encore, des obstacles pour lesquels au contraire l'énergie d'une onde incidente est totalement réfléchi. Pour ce faire, nous allons résoudre le problème (1) pour une large gamme de ε de manière efficace grâce à la méthode des bases réduites. Dans un premier temps, nous devons préciser comment étudier le problème (1). Ceci va dépendre de la fréquence ω .

1 Étude basse fréquence

Question 1. Donner la formulation variationnelle associée à (1) dans $H_0^1(\Omega)$. On l'écrira sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2)$$

et l'on précisera les expressions de $a(\cdot, \cdot)$, $\ell(\cdot)$.

Définissons $I := (0; 1)$. Dans la PC10, nous établirons l'inégalité de Poincaré

$$\int_I \varphi(t)^2 dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_I (\partial_t \varphi(t))^2 dt, \quad \forall \varphi \in H_0^1(I),$$

1. Si vous avez des questions, n'hésitez pas à me contacter.

où λ désigne la plus petite valeur propre du Laplacien Dirichlet dans I , i.e. la plus petite valeur de $\mu \in \mathbb{R}$ telle qu'il existe une solution non nulle à

$$\begin{cases} -\partial_t^2 \varphi = \mu \varphi & \text{sur } I \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Question 2. Calculer la valeur de λ et établir l'inégalité de Poincaré

$$\pi^2 \int_{\Omega} v^2 dz \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dz, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Question 3. Supposons $\varepsilon \leq 1$ dans Ω . Montrer que le problème (2) admet une unique solution pour $\omega \in [0; \omega_0)$ où l'on donnera la plus grande valeur possible pour $\omega_0 > 0$.

2 Problème de diffraction d'ondes

À plus haute fréquence, des ondes peuvent se propager dans le guide, dont nous allons étudier la diffraction par l'objet \mathcal{O} . Commençons par identifier ces ondes que nous définissons comme les solutions à variables séparées du problème (1) sans obstacle et sans terme source.

Question 4. Fixons $\varepsilon \equiv 1$ et $f \equiv 0$ dans Ω . Supposons $\omega \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'à un facteur multiplicatif près, les solutions de (1) de la forme $v(x, y) = \alpha(x)\varphi(y)$ (à variables séparées) sont égales à

$$v_n^{\pm}(x, y) = \begin{cases} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - (n\pi)^2} x} \sin(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, n < \omega/\pi \\ e^{\mp \sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} x} \sin(n\pi y) & \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, n > \omega/\pi. \end{cases}$$

Dans la suite nous imposons $\omega \in (\pi; 2\pi)$ de sorte que seules les ondes $v^{\pm}(x, y) := e^{\pm i\beta x} \sin(\pi y)$, $\beta := \sqrt{\omega^2 - \pi^2}$ peuvent se propager, les autres étant exponentiellement croissantes ou décroissantes à l'infini. De nouveau nous considérons la situation générale où $\varepsilon \neq 1$.

Question 5. La forme $a(\cdot, \cdot)$ apparaissant en (2) est-elle coercive pour $\omega \in (\pi; 2\pi)$? Justifier. (*Indice : on pourra travailler notamment avec des fonctions "plateau" $\zeta_d \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que $\zeta_d(x) = 1$ pour $|x| \leq d$ et $\zeta_d(x) = 0$ pour $|x| \geq d + 1$.*)

Lorsque des ondes propagatives existent, il est nécessaire de compléter le système (1) avec des conditions de radiation pour espérer obtenir un problème bien posé (existence et unicité de la solution). Nous dirons qu'une solution v de (1) est *sortante* si elle admet la décomposition

$$v(x, y) = s_1^{\pm} v^{\pm}(x, y) + \sum_{n=2}^{\infty} s_n^{\pm} e^{-\sqrt{(n\pi)^2 - \omega^2} |x|} \sin(n\pi y) \quad \text{pour } \pm x > L \quad (3)$$

où les s_n^{\pm} sont des constantes de \mathbb{C} . La condition (3) est liée à la physique du problème et assure que le champ se propage *vers* l'infini. Elle peut être vue comme une condition aux limites à l'infini.

Plutôt que de considérer le problème avec terme source (3), nous souhaitons nous intéresser à la diffraction de l'onde incidente $u_{\text{inc}} = v^+$ se propageant de la gauche vers la droite². Cela nous amène à étudier le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \Delta u + \omega^2 \varepsilon u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u - u_{\text{inc}} \text{ sortante.} \end{cases} \quad (4)$$

2. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de $(z, t) \mapsto e^{i(\beta x - \omega t)} \sin(\pi y)$.

Ici $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions qui appartiennent à $H^1(D)$ pour tout domaine borné $D \subset \Omega$. On peut établir que (4) admet bien une solution u . Notons qu'on a alors la décomposition

$$u = \begin{cases} v^+ + Rv^- + \tilde{u} & \text{pour } x < -L \\ Tv^+ + \tilde{u} & \text{pour } x > L \end{cases} \quad (5)$$

où $R = s_1^-$, $T = 1 + s_1^+$ et $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ est exponentiellement décroissant à l'infini. Usuellement, R , T sont appelés coefficients de réflexion et de transmission.

Question 6. En multipliant par \bar{u} l'équation volumique de (4) et en intégrant par parties sur le domaine $\Omega_L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}$, établir la relation

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (\text{conservation d'énergie}). \quad (6)$$

Question 7. Définissons $\Sigma_{\pm L} = \{\pm L\} \times (0; 1)$. Montrer que

$$R = 2 \int_{\Sigma_{-L}} (u - u_{\text{inc}}) v^+ dy, \quad T = 2 \int_{\Sigma_{+L}} u v^- dy.$$

Le caractère non borné du domaine Ω ne permet pas d'appliquer directement les méthodes éléments finis vues en cours pour calculer une approximation numérique de u . Dans la suite, nous allons expliquer comment approcher $u|_{\Omega_L}$. Pour cela, nous allons résoudre un problème posé sur Ω_L pour lequel il nous faut déterminer des conditions aux limites bien choisies sur $\Sigma_{\pm L}$ pour ne pas générer de réflexions parasites trop dérangeantes.

Pour $\pm x \geq L$, on a

$$(u - u_{\text{inc}})(x, y) = s_1^\pm v^\pm(x, y) + \dots$$

où les \dots correspondent à des termes exponentiellement décroissants à l'infini. Puisque $\partial_x v^\pm = \pm i\beta v^\pm$, en première approximation, cela nous invite à imposer

$$\partial_n(\hat{u} - u_{\text{inc}}) = \pm \partial_x(\hat{u} - u_{\text{inc}}) = i\beta(\hat{u} - u_{\text{inc}}) \quad \text{sur } \Sigma_{\pm L}. \quad (7)$$

Ici n désigne le vecteur unitaire à $\partial\Omega_L$ orienté vers l'extérieur de Ω_L et \hat{u} est une approximation de u . La condition (7) permet de laisser passer les ondes propagatives. Elle constitue néanmoins une approximation car elle n'est pas vérifiée par les modes évanescents. Finalement, dans nos expériences numériques, nous travaillerons sur le problème

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Trouver } \hat{u} \in H^1(\Omega_L) \text{ telle que} & \\ \Delta \hat{u} + \omega^2 \varepsilon \hat{u} = 0 & \text{dans } \Omega_L \\ \hat{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \cap \partial\Omega \\ \partial_n \hat{u} - i\beta \hat{u} = \partial_n v^+ - i\beta v^+ & \text{sur } \Sigma_{\pm L}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Question 8. Donner la formulation variationnelle associée au système (8). On l'écrira sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in X \text{ telle que} \\ b(\hat{u}, v) = g(v), \quad \forall v \in X, \end{array} \right. \quad (9)$$

et l'on précisera X ainsi que les expressions de $b(\cdot, \cdot)$, $g(\cdot)$.

Question 9. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $B : X \rightarrow X$ tel que $(B\varphi, \varphi')_{H^1(\Omega_L)} = b(\varphi, \varphi')$ pour tout $\varphi, \varphi' \in X$. Montrer que B se décompose sous la forme $B = \mathcal{J} + K$, où $\mathcal{J} : X \rightarrow X$ est un isomorphisme et $K : X \rightarrow X$ un opérateur compact. (On pourra s'aider du début de l'annexe ci-dessous.)

Avec l'alternative de Fredholm, ce résultat permet de prouver que (8) possède une unique solution

dès lors que B est injectif (comme en dimension finie). Par ailleurs, on peut établir que B est injectif pour tout $\omega \in (\pi; 2\pi) \setminus \mathcal{E}$ où \mathcal{E} est un ensemble discret sans point d'accumulation. Dorénavant, nous supposons que $\omega \notin \mathcal{E}$ de sorte que (8) admet une unique solution \hat{u} . Enfin on peut prouver qu'on a l'estimation $\|u - \hat{u}\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C e^{-cL}$ pour des constantes $c, C > 0$ indépendantes de $L > 0$. Ainsi pour L assez grand, \hat{u} constitue une bonne approximation de u . Définissons les quantités

$$\hat{R} := 2 \int_{\Sigma_{-L}} (\hat{u} - u_{\text{inc}}) v^+ dy, \quad \hat{T} := 2 \int_{\Sigma_{+L}} \hat{u} v^- dy.$$

Question 10. Justifier pourquoi \hat{R}, \hat{T} sont de bonnes approximations des R, T introduits en (5).

3 Méthode des bases réduites

La méthode des bases réduites apparaît dans des contextes où l'on a besoin de résoudre une équation aux dérivées partielles pour de nombreuses valeurs d'un paramètre (le coefficient physique ε dans notre problème). Elle permet de faire cela en évitant des calculs trop coûteux. Le principe est le suivant :

- 1) On effectue d'abord la résolution pour un échantillon bien choisi de petite taille de valeurs du paramètre.
- 2) On génère avec ces solutions particulières un espace vectoriel de dimension réduite dans lequel on va chercher une approximation de la solution du problème pour toutes les autres valeurs du paramètres. Cette approximation sera obtenue en mettant en œuvre une méthode de Galerkin dans l'espace vectoriel des solutions particulières.

Notre objectif ici est d'appliquer la méthode des bases réduites pour trouver une approximation de la solution de (9) pour de nombreuses valeurs de ε et identifier des situations où :

- $\hat{R} \approx 0$, de sorte que $R \approx 0$;
- $\hat{T} \approx 0$, de sorte que $T \approx 0$.

Dans le premier cas de figure, l'énergie de l'onde incidente u_{inc} est parfaitement transmise ($|T| \approx 1$). Dans la seconde situation, l'énergie de l'onde incidente est complètement réfléchi ($|R| \approx 1$). Chacune de ces configurations peut être intéressante pour les applications.



FIGURE 2 – Description du problème.

Définissons

$$M_1 := (-1.5, 0.55), \quad M_2 := (1.5, 0.55), \quad r = 0.4, \quad \mathcal{O} := B(M_1, r) \cup B(M_2, r),$$

où $B(M, r)$ désigne la boule ouverte centrée en M de rayon $r > 0$. Fixons également $\omega = 1.8\pi \in (\pi; 2\pi)$, $L = 4$ et prenons

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_L \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \eta & \text{dans } \mathcal{O}. \end{cases}$$

Ci-dessus η est une constante positive. L'approximation des solutions de (9) conduit à considérer le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u}_h \in X_h \text{ telle que} \\ b(\hat{u}_h, v_h) = g(v_h), \quad \forall v_h \in X_h, \end{cases} \quad (10)$$

où X_h est un espace de dimension finie N approchant X .

Question 11. Montrer que la résolution de (10) amène à étudier le système linéaire

$$B_\eta Y = G \quad \text{avec} \quad B_\eta = K + \eta M. \quad (11)$$

On donnera les expressions de K , $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ (indépendantes de η) et de Y , $G \in \mathbb{C}^N$.

Question 12. Écrire un programme *Freefem++* permettant de résoudre le problème (10). Pour ce faire, on utilisera la base de code donnée à la fin de ce document.

Dans un premier temps, on effectuera une validation en considérant la situation de référence $\eta = 1$, i.e. $\varepsilon \equiv 1$ (observer qu'alors on connaît la solution exacte de (4)). Dans un second temps, on approchera les solutions du problème (10) pour $n := 5$ valeurs de η uniformément réparties dans $[1; 2.5]$: $\eta \in \{1, 1.375, 1.75, 2.125, 2.5\}$. Calculer numériquement les coefficients \hat{R} , \hat{T} et vérifier que la conservation d'énergie (6) est satisfaite aux erreurs d'approximation près.

Notons u_j , $j = 1, \dots, n$, ces n solutions que nous supposons indépendantes (nous omettons de préciser la dépendance en h pour simplifier). Définissons

$$V_h := \text{vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Il s'agit d'un sous espace de X_h de dimension $n \ll N = \dim X_h$. Pour $\eta > 0$ donné, nous allons chercher une approximation de la solution de (10) dans le petit espace V_h en résolvant le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\text{br}} \in V_h \text{ telle que} \\ b_\eta(u^{\text{br}}, u_j) = g(u_j), \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (12)$$

Ici $b_\eta(\cdot, \cdot)$ désigne la forme bilinéaire apparaissant en (9) où l'on indique la dépendance en η .

Question 13. En décomposant u^{br} sous la forme $u^{\text{br}} = \sum_{i=1}^n Y_i^{\text{br}} u_i$, montrer que la résolution de (12) se ramène à la résolution du système linéaire

$$B_\eta^{\text{br}} Y^{\text{br}} = G^{\text{br}}$$

où $Y^{\text{br}} = (Y_i^{\text{br}})_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$. On donnera les expressions de $B_\eta^{\text{br}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $G^{\text{br}} \in \mathbb{C}^n$ et on observera que B_η^{br} s'écrit sous la forme

$$B_\eta^{\text{br}} = K^{\text{br}} + \varepsilon M^{\text{br}}$$

où $K^{\text{br}}, M^{\text{br}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont indépendantes de η . On exprimera $K^{\text{br}}, M^{\text{br}}$ en fonction notamment des matrices K, M apparaissant en (11).

Question 14. Construire en *Freefem++* les matrices $K^{\text{br}}, M^{\text{br}}$. Calculer u^{br} pour $\eta = 1.8$ et comparer cette approximation base réduite avec la solution éléments finis obtenue en résolvant (10) (celle plus coûteuse à calculer).

Question 15. En utilisant la méthode des bases réduites, calculer une approximation de la solution de (9) pour 200 valeurs de η uniformément réparties dans $[1; 2.5]$. Pour ces mêmes valeurs de η , calculer la solution éléments finis correspondante en résolvant (10). Insistons sur le fait que ceci est précisément ce que l'on souhaiterait éviter de faire. Néanmoins cela reste abordable dans le cas scalaire 2D étudié ici et cela nous permet d'étudier la pertinence de l'approximation base réduite. Représenter sur un même graphique les courbes $\eta \mapsto |\hat{R}^{\text{br}}|$, $\eta \mapsto |\hat{T}^{\text{br}}|$, $\eta \mapsto |\hat{R}|$, $\eta \mapsto |\hat{T}|$. Pour ce faire, on écrira les résultats obtenus avec *Freefem* dans un fichier et l'on tracera les courbes par exemple avec *Python*. Commenter.

Question 16. Construire une nouvelle base réduite en résolvant le problème (10) pour $n := 15$ valeurs de η uniformément réparties dans $[1; 6]$. Reprendre la question 15 en effectuant la résolution pour 500 valeurs de η uniformément réparties dans $[1; 6]$. Commenter vos résultats. Enfin, identifier des situations où :

- $R \approx 0$ (transmission parfaite en énergie);
- $T \approx 0$ (réflexion totale en énergie).

Dans chacun des cas, on représentera le champ u^{br} correspondant.

Dans cette approche, le choix des éléments de la base réduite joue un rôle capital. Il existe des approches beaucoup plus fines que de prendre des fonctions pour un échantillon de paramètres uniformément répartis dans l'intervalle d'intérêt.

4 Annexe

i) Le théorème de Lax-Milgram pour une forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ sur un espace de Hilbert X est encore valable si l'on suppose seulement que $\Re c(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $X \times X$, autrement dit, s'il l'on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\Re c(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

On pourra vérifier que si $c(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire coercive (au sens ci-dessus) continue sur $X \times X$, alors l'opérateur $C : X \rightarrow X$ tel que

$$(C\varphi, \varphi')_X = c(\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in X,$$

est un isomorphisme, autrement dit un opérateur linéaire continu bijectif d'inverse continu.

ii) On dit qu'un opérateur linéaire $K : X \rightarrow X$ est compact si de toute suite (u_n) bornée dans X , on peut extraire une sous-suite (v_n) telle que (Kv_n) converge dans X .

iii) Le code ci-dessous fournit des éléments pour répondre aux questions. Il est à compléter.

```
load "lapack"
/*****
Construction du maillage
*****/
real L=4;          //domaine [-L;L]x[0;1]
int Nmaillage=20;
border a(t=-L,L)x =t; y = 0; label = 1;
border b(t=0,1)x =L; y = t; label = 2; //reference 2 sur le bord droit
border c(t=-L,L)x =-t; y = 1; label = 1;
border d(t=0,1)x =-L; y = 1-t; label = 3; //reference 3 sur le bord gauche
real r=0.4;
border Disque1(t=0,2*pi) x=-1.5+r*cos(t); y=0.55+r*sin(t); label = 0;
border Disque2(t=0,2*pi) COMPLETER ICI
mesh ThDefaut=buildmesh(Disque1(int(2*pi*r)*Nmaillage)+Disque2(int(2*pi*r)*Nmaillage));
mesh ThSansDefaut=buildmesh(a(2*L*Nmaillage)+b(Nmaillage)+c(2*L*Nmaillage)+d(Nmaillage)
+Disque1(-int(2*pi*r)*Nmaillage)+Disque2(-int(2*pi*r)*Nmaillage));
mesh Th = ThSansDefaut+ThDefaut;
plot(Th,wait=1,cmm="Appuyer sur Enter pour poursuivre");
fespace Xh(Th,P2); // espace elements finis P2
int nddl= Xh.ndof; //dimension de l'espace éléments finis
/*****
Paramètres physiques
*****/
real w=1.8*pi; // frequence de travail
real beta=sqrt(w^2-pi^2);
func uifonc=exp(1i*beta*x)*sin(pi*y); //champ incident
/*****
On passe à la formulation variationnelle
*****/
int nbr=5; //on échantillonne avec 5 valeurs
```

```

real [int] select(nbr);
real etaMin=1;
real etaMax= COMPLETER ICI
for (int i=0;i<nbr;i++)
select[i]=COMPLETER ICI
real eta;
Xh<complex> u,us,v,ui=uifonc;
Xh uReel;
matrix<complex> B,K,M;
complex[int] G(Xh.ndof);
varf kForme(u,v) = COMPLETER ICI
varf mForme(u,v)= COMPLETER ICI
varf gForme(u,v)= COMPLETER ICI
K= kForme(Xh,Xh);
M= mForme(Xh,Xh);
G= gForme(0,Xh);
Xh<complex> [int] solutions(nbr);
for (int i=0;i<nbr;i++)
{
eta=select[i];
B= K+eta*M;
set(B,solver=UMFPACK);
u[]=B^-1*G; //resolution du systeme
uReel=real(u);
plot(uReel,fill=1,dim=2,nbiso=40, value=10,wait=0,cmm="Re u");
cout << "eta = " << eta << endl;
solutions[i]=u;
}
/*****
Construction des matrices bases réduites
*****/
complex [int,int] Bbr(nbr,nbr),Kbr(nbr,nbr),Mbr(nbr,nbr),invBbr(nbr,nbr);
complex [int] Ubr(nbr),Gbr(nbr);
complex [int] buffer(nddl);
for(int i=0;i<nbr;i++){
for(int j=0;j<nbr;j++){
buffer = (K*solutions[j] []);
Kbr(i,j) =solutions[i] []'*buffer;
COMPLETER ICI
}
COMPLETER ICI
}
Xh<complex> ubr;
Xh ubrReel;
/*****
Validation par comparaison EF sur un cas particulier
*****/
eta=1.8;
//solution base reduite
Bbr=Kbr+eta*Mbr;
invBbr=Bbr^-1;
Ubr=invBbr*Gbr;
ubr=0;
RECONSTRUIRE ubr
ubrReel=real(ubr);
plot(ubrReel,fill=1,dim=2,nbiso=40, value=10,wait=0,cmm="Approximation base reduite");
//solution EF
COMPLETER ICI
/*****
Boucle en eta
*****/

```

```

int NbStep=200;
complex R;
complex T;
real [int] TablelEps(NbStep);
real [int] TablelRRe(NbStep);
real [int] TablelRIm(NbStep);
real [int] TablelTRe(NbStep);
real [int] TablelTIm(NbStep);
func vp=exp(1i*beta*x)*sin(pi*y);
func vm=exp(-1i*beta*x)*sin(pi*y);
for (int i=0;i<NbStep;i++)
{
eta=etaMin+(etaMax-etaMin)*i/(NbStep-1);
TablelEps(i)=eta;
CALCULER uBr
T= COMPLETER ICI
R= COMPLETER ICI
cout<<"*****" <<endl;
cout<<"Progression = " << i/(NbStep-1.)*100 <<"%"<<endl;
cout<<"eta = " << eta <<endl;
cout<<"Energy conservation  $|R|^2+|T|^2 =$ " << abs(R)*abs(R)+abs(T)*abs(T) <<endl;
cout<<"*****" <<endl;
TablelRRe(i)=real(R);
TablelRIm(i)=imag(R);
TablelTRe(i)=real(T);
TablelTIm(i)=imag(T);
}
/*****
On enregistre les resultats dans un fichier
*****/
ofstream f("BalayageBR.txt");
int nold=f.precision(15); // pour regler la precision d'enregistrement
f << 1 << " " << 2 << endl; MODIFIER ICI

```