# Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires

Corrigé de la Séance 12

1 Février 2005

## Exercice 1. Un exemple de schéma non conservatif

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \dfrac{u_j^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) & si \quad u_j^n \geq 0 \\ u_j^n - \dfrac{u_j^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) & si \quad u_j^n \leq 0 \end{cases}$$

pour approcher l'équation de Bürgers.

**1.1 -** Considérons l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$$

et les deux schémas explicites décentrés en espace suivant :
- schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0\,;$$

- schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0\,.$$

Pour $a \geq 0$, le schéma décentré à gauche est stable sous la CFL $a\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \geq 1$ et le schéma décentré à droite est instable. Pour $a \leq 0$, le schéma décentré à gauche est instable et le schéma décentré à droite est stable sous la CFL $|a|\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \geq 1$.

Par conséquent, pour $a \geq 0$, on choisit le schéma décentré à gauche et pour $a \leq 0$ on choisit le schéma décentré à droite.

En écrivant l'équation de Bürgers sous forme non conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,$$

avec $a(u) = u$, on obtient une équation de type transport avec une vitesse non constante. On généralise le résultat obtenu avec l'équation de transport en prenant comme critère le signe de $(a(u))_j^n = u_j^n$.

**1.2 -** Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $g$ régulière telle que le schéma se mette sous la forme conservative. La fonction $g$ vérifie donc

$$g(v,w) - g(u,v) = \begin{cases} v(v-u) & si \quad v \geq 0 \\ v(w-v) & si \quad v \leq 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Comme $g$ est supposée régulière, la fonction $(u,v,w) \to g(v,w) - g(u,v)$ l'est aussi. Or ce n'est pas le cas étant donné (1).

**1.3 -** On considère la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} .$$

On peut construire la solution faible entropique exacte en utilisant la méthode des caractéristiques (problème de Riemann à 2 états). La condition de RH nous donne l'équation de la ligne de choc $\sigma(t) = \dfrac{1}{2}t$. La solution est

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Appliquons à présent le schéma à cette condition initiale (notons qu'on n'a pas besoin de la discrétiser). On trouve $u_j^n = u_j^0$ pour tout $j$. On a donc une ligne de choc d'équation $\sigma(t) = 0$. $\{u_j^n\}_j$ n'est pas une solution faible car ele ne vérifie pas RH au niveau du choc.

# Exercice 2. Le schéma d'Engquist-Osher

**2.1 -** Le schéma peut s'écrire

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_j^{n+1}) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))\,,$$

avec

$$g(u_j^n, u_j^{n+1}) = \frac{1}{4}((u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2) - \frac{1}{2}\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |\xi| d\xi\,.$$

Le flux numérique $g$ vaut donc

$$g(u,v) = -\frac{1}{2}\int_u^v |\xi| d\xi + \frac{1}{4}(u^2+v^2)\,.$$

**2.2 -** On a

$$g(u,u) = \frac{1}{2}u^2 = f(u)\,.$$

Le schéma est donc consistant avec l'équation de Bürgers.

**2.3 -** On écrit le schéma sous la forme

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)\,,$$

avec

$$H(u,v,w) = v - \frac{\alpha}{4}(w^2-u^2) + \frac{\alpha}{2}\left(\int_v^w |\xi| d\xi - \int_u^v |\xi| d\xi\right)$$

et montrons que $H$ est croissante par rapport à chacune de ses variables.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\alpha}{2}u + \frac{\alpha}{2}|u| \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 1 - \alpha|v| \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -\frac{\alpha}{2}w + \frac{\alpha}{2}|w| \tag{4}$$

Les expressions (2) et (4) sont toujours positives. $\dfrac{\partial H}{\partial v}$ est positive sous la condition de CFL $\sup_j |u_j^n| \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Finalement le schéma est monotone sous la condition de CFL $\sup_j |u_j^n| \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

On en déduit que notre schéma est entropique.

**2.4 -** On travaille par récurrence. On suppose que $u_j^n \geq 0$ pour tout $j$. $u_j^{n+1}$ est donné par $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$. La monotonie de $H$ implique $u_j^{n+1} \geq H(0,0,0) = 0$.

**2.5 -** Plaçons-nous dans une zone où $u_j^n \geq 0$. Dans ce cas $a(u) \geq 0$. Le schéma s'écrit (après un petit calcul)

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\alpha}{2}((u_{j-1}^n)^2 - (u_j^n)^2)\,,$$

ce qui correspond à un schéma décentré à gauche.

De même pour une zone où $u_j^n \leq 0$, on trouve un schéma décentré à droite

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\alpha}{2}((u_j^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2)\,.$$

# Exercice 3. Le schéma de Lax-Wendroff

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(a_{j+\frac{1}{2}}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-\frac{1}{2}}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right)$$

où $f_j^n = \dfrac{\left(u_j^n\right)^2}{2}$, $a_{j+\frac{1}{2}}^n = \dfrac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

**3.1 -** Le schéma peut s'écrire sous la forme conservative

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_j^{n+1}) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))\,,$$

avec $g(u,v) = \dfrac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{u+v}{2}(f(v) - f(u))$.

Le flux numérique $g$ vérifie $g(u,u) = f(u)$. Le schéma est donc consistant avec l'équation de Bürgers et est donc d'ordre 1 au moins..

**3.2 -** On calcule l'erreur de troncature

$$\epsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^{n+1}) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)}{\Delta x}\,,$$

où $\bar{u}(x,t)$ est solution exacte de l'équation de Bürgers et $\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t^n)$.

En faisant un DL on obtient

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^n = \quad & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t^n) \\
& + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n)\right)^2 + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\
& + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n)\right)^2 - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\
& + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\,.
\end{aligned}$$

En dérivant la relation de consistance $g(u,u) = f(u)$ on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,u) = f'(u) = u\,.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n) + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n) = 0\,.$$

En utilisant l'expression de $g$ et en dérivant on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,u) & = & \dfrac{1}{2}u + \dfrac{\alpha}{2}u^2 \\
\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,u) & = & \dfrac{1}{2}u - \dfrac{\alpha}{2}u^2 \\
\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,u) & = & \dfrac{1}{2} + \alpha u \\
\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,u) & = & \dfrac{1}{2} - \alpha u\,,
\end{array}$$

ce qui nous donne

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,u) - \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,u) & = & -\alpha u^2 \\
\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,u) - \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,u) & = & -2\alpha u\,.
\end{array}$$

En utilisant tout ce qu'on a fait précédemment, l'erreur de troncature devient

$$\begin{array}{rl}
\epsilon_j^n = & \dfrac{\Delta t}{2}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t^n) \\
& -\Delta t \bar{u}_j^n \left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n)\right)^2 - \dfrac{\Delta t}{2}(\bar{u}_j^n)^2 \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t^n) \\
& +\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\,.
\end{array}$$

On repart de l'équation de Bürgers qu'on dérive par rapport au temps (la solution est supposée régulière),

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) & = & 0 \\
\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} & = & 0 \\
\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) & = & 0 \\
\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - 2\bar{u}\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 - \bar{u}^2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} & = & 0\,.
\end{array}$$

En injectant ce résultat dans l'ereur de troncature on obtient finalement

$$\epsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\,.$$

Le schéma est donc d'ordre 2 (au moins).

**3.3 -** En l'appliquant notre schéma à la donnée initiale suivante :

$$u_j^0 = \begin{cases} w & \text{si} \quad j < 0 \\ -w & \text{si} \quad j \geq 0 \end{cases}$$

on obtient $u_j^n = u_j^0$ pour tout $j$. La solution est stationnaire. La ligne de choc est d'équation $\sigma(t) = 0$, elle vérifie bien RH. Par contre, dans le cas où $w < 0$, on a $u^- < u^+$ au niveau de la ligne de discontinuité ce qui n'est pas entropique.

# Exercice 4. Erreur de troncature et schémas monotones

Soit un schéma sous forme conservative :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha\left(g\left(u_{j+1}^n, u_j^n\right) - g\left(u_j^n, u_{j-1}^n\right)\right), \quad \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

consistant avec l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0. \tag{5}$$

**4.1 -** On reprend le résultat établi à l'exercice précédent question 2 et on obtient directement l'erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u},\bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u},\bar{u})\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$$

**4.2 -** On dérive l'équation (5) par rapport au temps

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(f(\bar{u})) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}(f(\bar{u})) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})\frac{\partial}{\partial x}(f(\bar{u}))\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

**4.3 -** C'est immédiat en utilisant ce qu'on vient de faire aux 2 questions précédentes.

**4.4 -** Le schéma étant monotone, on sait que la fonction $H$ définie par $H(u, v, w) = v - \alpha(g(v, w) - g(u, v))$ est croissante par rapport à chacune de ses variables, d'où

$$\begin{aligned}
&(6) \qquad & \frac{\partial H}{\partial u}(u, u, u) &= \alpha \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) \geq 0 \\
&(7) \qquad & \frac{\partial H}{\partial v}(u, u, u) &= 1 - \alpha \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right) \geq 0 \\
&(8) \qquad & \frac{\partial H}{\partial w}(u, u, u) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \geq 0\,.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de consistance $g(u, u) = f(u)$ dérivée par rapport à $u$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) = a(u)\,.$$

Par conséquent

$$\beta(u, \alpha) = \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)\,.$$

L'inégalité (7) nous permet de majorer $\beta(u, \alpha)$

$$\beta(u, \alpha) \leq \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2\,.$$

Enfin (6) et (8) nous permettent d'écrire

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right) \geq \left| \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right|\,.$$

Finalement $\beta(u, \alpha) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

**4.5 -** Plaçons-nous dans le cas où $\beta(u, \alpha) = 0$ pour tout $u$. On a donc les deux égalités suivantes (qui étaient des inégalités dans la démonstration précédente)

$$\begin{aligned}
&(9) \qquad & \frac{\partial H}{\partial v} &= 1 - \alpha \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right) = 0 \\
&(10) \qquad & \beta(u, \alpha) &= \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 = 0, .
\end{aligned}$$

L'égalité (10) nous donne $\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial v} g(u, u) = 0$. Distinguons les 2 cas :

1. $\dfrac{\partial}{\partial u} g(u,u) = 0$ donc $\dfrac{\partial}{\partial v} g(u,u) = -\dfrac{1}{\alpha}$ et $a(u) = -\dfrac{1}{\alpha}$. La fonction $f$ (définie à une constante près) est donc linéaire,

$$f(u) = -\frac{1}{\alpha} u \,.$$

   L'équation (5) est une équation de transport de vitesse $-\dfrac{1}{\alpha}$.

2. $\dfrac{\partial}{\partial v} g(u,u) = 0$ donc $\dfrac{\partial}{\partial u} g(u,u) = \dfrac{1}{\alpha}$ et $a(u) = \dfrac{1}{\alpha}$. La fonction $f$ (définie à une constante près) est donc linéaire,

$$f(u) = \frac{1}{\alpha} u \,.$$

   L'équation (5) est une équation de transport de vitesse $\dfrac{1}{\alpha}$.

**4.6 -** Sauf dans le cas exceptionnel ci-dessus où l'on travaille avec l'équation de transport vérifiant $|a|\Delta t/\Delta x = 1$, un schéma monotone est d'ordre 1 (au plus).