Séance n^{o}1
Introduction aux EDP et aux différences finies

2 Novembre 2004

Exercice 1. Principes du maximum discret et continu - Convergence L^∞.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère l'unique solution u du problème :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On admettra le résultat suivant :

$$\text{(2)} \qquad f \in C^\alpha(\bar\Omega) \Longrightarrow u \in C^{\alpha+2}(\bar\Omega), \text{ pour } \alpha > 0.$$

avec l'estimation :

$$\text{(3)} \qquad \|u\|_{C^{\alpha+2}(\bar\Omega)} \leq C\ \|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}$$

1.1 - En supposant que $f \in C^\alpha(\bar\Omega)$, $\alpha > 2$, démontrer le principe du maximum :

$$\min\,(0, \min_{x\,\in\,\bar\Omega} f(x)) \leq u(x) \leq \max\,(0, \max_{x\,\in\,\bar\Omega} f(x)) \quad \forall x \in \bar\Omega$$

En déduire l'unicité de la solution.

1.2 - On suppose maintenant que Ω est le carré $]0,1[\times]0,1[$ auquel cas (2) reste vrai si on suppose f à support compact dans Ω. On considère un maillage uniforme de pas h de $\bar{\Omega}$, M_{ij} désignant le point de coordonnées (ih, jh) $\left(0 \leq i, j \leq N, h = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}^*\right)$.

On approche la solution de (1) par le schéma aux différences finies :

$$(4) \qquad \begin{cases} -\dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} + u_{ij} = f_{ij} & \text{si } M_{ij} \in \Omega \\ u_{ij} = 0 & \text{si } M_{ij} \in \Gamma \end{cases}$$

Montrer que la recherche de la solution approchée équivaut à la résolution d'un système linéaire dont on précisera la matrice.

1.3 - Démontrer que si $u_{i,j}$ est solution de (4), alors :

$$\min\,(0, \min_{i,j} f_{ij}) \leq u_{ij} \leq \max\,(0, \max_{i,j} f_{ij})$$

En déduire l'existence et l'unicité de la solution du schéma (4).

1.4 - Nous désignons par u_h la solution de (4) et posons :

$$\| u - u_h \|_\infty = \max_{i,j} | u(M_{ij}) - u_{ij} |$$

Dans le cas où $f \in C^2(\bar{\Omega})$, établir une estimation d'erreur pour $\| u - u_h \|_\infty$ en fonction de h et $\| f \|_{C^2(\bar{\Omega})}$.

1.5 - Généraliser les résultats des questions 1.1 à 1.4 à l'exemple suivant :

$$(5) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(a(x)\nabla u) + q(x)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où $a(x)$ et $q(x)$ désignent des fonctions régulières satisfaisant en outre :

$$\begin{cases} 0 < a_* \leq a(x) \leq a^* < +\infty & \forall x \in \bar{\Omega} \\ 0 < q_* \leq q(x) \leq q^* < +\infty & \forall x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

(On construira en particulier un schéma d'approximation par différences finies pour (5)).

Exercice 2. Sur l'équation de la chaleur 1D.

On s'intéresse à $u(x,t)$ solution de :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in]0,1[,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \end{cases}$$

2.1 - Calculer la solution explicite de (6) sous la forme d'un développement en séries de Fourier adapté au problème. En déduire une estimation L^2 de la solution. Quelle est la limite de la solution quand $t \to \infty$?

2.2 - Expliquer, en procédant comme à la question précédente, pourquoi le problème :

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in]0,1[,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \end{cases}$$

est mal posé.

Exercice 3. Problèmes stationnaires bien et mal posés.

3.1 - Etant donné $f(x) :]0,1[\to \mathbb{R}$ et $a(x) :]0,1[\to \mathbb{R}$, bornée strictement positive, on s'intéresse au problème

$$(8)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\big) = f & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{cases}$$

3.1 -(a) Démontrer l'unicité de la solution.

3.1 -(b) Démontrer sans chercher à calculer la solution que l'on a le résultat de stabilité L^2 ($a_- > 0$ désigne la borne inférieure de $a(x)$) :

$$\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{4a_-^2} \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx$$

(Indication : multiplier l'équation par u et intégrer sur $]0,1[$. On démontrera indépendamment que, comme $u(0) = 0$,

$$\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\frac{\partial u}{\partial x}(x)|^2 \, dx. \quad)$$

3.1 -(c) Calculer explicitement la solution du problème.

3.2 - On s'intéresse au problème

$$(9) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\big) = 0 & x \in]0,1[, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

On suppose que la fonction $a(x)$ ne s'annule jamais mais qu'elle n'est plus nécessairement de signe constant (penser à une fonction constante par morceaux). Montrer que le problème est bien posé si et seulement si :

$$\int_0^1 a(x)^{-1} \, dx \neq 0.$$

3.3 - Ω désignant un ouvert borné régulier et connexe de $\mathbb{R}^N$, on s'intéresse au problème :

$$(10) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

où f et g sont donnés dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$.

3.3 -(a) Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution. On rajoute alors la condition :

$$(11) \qquad \int_\Omega u \, dx = 0$$

qui permet, on l'admettra, de garantir l'unicité de la solution.

3.3 -(b) Montrer que si (10,11) admet une solution dans $H^1(\Omega)$, nécessairement :

$$(12) \qquad \int_\Omega f \, dx + \int_\Gamma g \, d\sigma = 0$$