Séance n°1

Introduction aux EDP et aux différences finies
Corrigé

2 Novembre 2004

Exercice 1. Principes du maximum discret et continu - Convergence L^∞.

1.1 - On suppose que $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\alpha > 2$, on a donc $u \in C^4(\bar{\Omega})$. u est une fonction continue sur un domaine compact $\bar{\Omega}$, elle atteint donc ses bornes sur ce domaine. Notons $x_m \in \bar{\Omega}$ le point où u est maximale. On a deux alternatives :

- Premier cas : $x_m \in \partial\bar{\Omega} = \Gamma$, alors $u(x_m) = 0$.

- Second cas : $x_m \in \Omega$. Comme u est maximale en ce point et $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a $\nabla u = 0$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0$. Donc $\Delta u(x_m) \leq 0$ et $u(x_m) = f(x_m) + \Delta u(x_m) \leq f(x_m)$

On a par conséquent :

$$u(x) \leq u(x_m) \leq \max(0, f(x_m)) \leq \max\,(0, \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

On effectue le même raisonnement sur le maximum de $-u$, on obtient l'inégalité demandée :

$$\min\,(0, \min_{x \in \bar{\Omega}} f(x)) \leq u(x) \leq \max\,(0, \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

Suppons que le problème admette deux solutions u_1, u_2. La différence $u_1 - u_2$ vérifie le système

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_2) + u_1 - u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En appliquant le principe du maximum, on a :

$$0 \leq u_1 - u_2 \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

On en déduit que $u_1 = u_2$; la solution est unique.

1.2 - On associe au point de coordonnées (ih, jh) $\left(0 \leq i, j \leq N, h = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}^*\right)$ le numéro $j(N+1)+i$. On note $u_{j(N+1)+i} = u_{i,j}$, et le vecteur $U = (u_m)_{1 \leq m \leq (N+1)^2}$. Le vecteur U est solution d'un système linéaire, dont la matrice s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 & .. & 0 & \\ -\dfrac{I}{h^2} & H & -\dfrac{I}{h^2} & 0 & \\ & & ... & & \\ 0 & -\dfrac{I}{h^2} & H & -\dfrac{I}{h^2} & \\ 0 & .. & 0 & I & \end{pmatrix}$$

I est la matrice identité de rang $N+1$, H est une matrice de rang $N+1$, qui s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ -\dfrac{1}{h^2} & 1+\dfrac{4}{h^2} & -\dfrac{1}{h^2} & 0 \\ & & ... & \\ 0 & -\dfrac{1}{h^2} & 1+\dfrac{4}{h^2} & -\dfrac{1}{h^2} \\ 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut être symétrisée car on a une condition de Dirichlet homogène.

1.3 - Notons le point (i_m, j_m) tel que $u_{i_m,j_m} = \max\limits_{i,j} u_{i,j}$. Comme dans la question 1, on distingue deux cas :
- Premier cas : le point M_{i_m,j_m} appartient au bord Γ, on a alors $u_{i_m,j_m} = 0$

- Second cas : le point M_{i_m,j_m} est à l'intérieur du carré $]0,1[\times]0,1[$, par définition de u_{i_m,j_m}, on a

$$u_{i_m,j_m} \geq u_{i_m+1,j_m}, u_{i_m-1,j_m}, u_{i_m,j_m-1}, u_{i_m,j_m+1}$$

D'où $u_{i_m+1,j_m} + u_{i_m-1,j_m} + u_{i_m,j_m+1} + u_{i_m,j_m-1} - 4u_{i_m,j_m} \leq 0$.
En utilisant l'équation du schéma on trouve $u_{i_m,j_m} \leq f_{i_m,j_m}$.
On a donc

$$u_{i,j} \leq u_{i_m,j_m} \leq f_{i_m,j_m} \leq \max\left(0, \max_{i,j} f_{ij}\right)$$

Par un raisonnement analogue sur $-u$ on aboutit à l'inégalité

$$\min\,(0, \min_{i,j} f_{ij}) \leq u_{ij} \leq \max\,(0, \max_{i,j} f_{ij})$$

Soit U la solution du système $A\,U \;=\; 0$, par le principe du maximum $u_{i,j} \;=\; 0$. $U \;=\; 0$, ce qui prouve que la matrice A est de noyau nul. De plus, c'est une matrice carrée, elle est donc inversible. La solution du schéma est unique.

1.4 - Notons l'erreur du schéma $\varepsilon_{i,j} \;=\; u(M_{i,j}) - u_{i,j}$. Cherchons maintenant le système linéaire vérifié par $\varepsilon_{i,j}$.On rappelle le développement de Taylor-Lagrange de $u(M_{i+1,j})$, qu'on peut écrire jusqu'à l'ordre 4 car $u \in C^4(\bar{\Omega})$

$$\begin{aligned}
u(M_{i+1,j}) \;&=\; u(M_{i,j}) \,+\, h\,\frac{\partial u}{\partial x} \,+\, \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,+\, \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \,+\, \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(M_1)\\
u(M_{i-1,j}) \;&=\; u(M_{i,j}) \,-\, h\,\frac{\partial u}{\partial x} \,+\, \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,-\, \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \,+\, \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(M_2)\\
u(M_{i,j+1}) \;&=\; u(M_{i,j}) \,+\, h\,\frac{\partial u}{\partial y} \,+\, \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \,+\, \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \,+\, \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(M_3)\\
u(M_{i,j-1}) \;&=\; u(M_{i,j}) \,-\, h\,\frac{\partial u}{\partial y} \,+\, \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \,-\, \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \,+\, \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(M_4)
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$u(M_{i+1,j}) + u(M_{i-1,j}) + u(M_{i,j+1}) + u(M_{i,j-1}) - 4\,u(M_{i,j}) \;=\; h^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \frac{h^4}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(B_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(B_2))$$

B_1, B_2 sont des points intermédiaires. Or u est solution du problème, donc

$$-(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(M_{i,j}) \,+\, u(M_{i,j}) \;=\; f_{i,j}$$

On a

$$\begin{aligned}
&-\frac{u(M_{i+1,j}) \,+\, u(M_{i-1,j}) \,+\, u(M_{i,j+1}) \,+\, u(M_{i,j-1}) \,-\, 4\,u(M_{i,j})}{h^2} \,+\, u(M_{i,j})\\
&+\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} \,-\, u_{ij}\\
&= f_{i,j} \,-\, f_{i,j} \,+\, \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(B_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(B_2))
\end{aligned}$$

L'erreur $\varepsilon_{i,j}$ vérifie le même système linéaire que $u_{i,j}$, avec un second membre égal à

$$\tilde{f}_{i,j} \;=\; \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(B_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(B_2))$$

On a une estimation du second membre :

$$\max_{i,j} |\tilde{f}_{i,j}| \;\leq\; C_1 h^2 (\max_{x \in \bar{\Omega}} |\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}| + \max_{x \in \bar{\Omega}} |\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}|) \;\leq\; C_1 h^2 ||u||_{C^4(\bar{\Omega})}$$

Or

$$||u||_{C^4(\bar{\Omega})} \;\leq\; C ||f||_{C^2(\bar{\Omega})}$$

En utilisant le principe du maximum, on en déduit que

$$||u - u_h||_\infty \;=\; \max_{i,j} |u(M_{i,j}) - u_{i,j}| \;\leq\; C C_1 h^2 ||f||_{C^2(\bar{\Omega})}$$

On a ainsi prouvé que le schéma introduit est un schéma d'ordre 2.

Exercice 2. Sur l'équation de la chaleur 1D.

2.1 - On cherche la solution sous la forme

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \, \sin(n\pi x)$$

Cette forme est adaptée au problème car $\sin(n\pi x)$ est une fonction propre du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; \lambda\, u \\ u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0 \end{array} \right.$$

La valeur propre associée vaut $\lambda \;=\; (n\,\pi)^2$. Les fonctions $\sin(n\pi x)$ forment une base orthogonale, car

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(n\,\pi x) \sin(m\,\pi x) dx \;&=\; \int_0^1 \frac{1}{2} \cos((n-m)\pi x) - \frac{1}{2} \cos((n+m)\pi x) dx \\ &=\; \frac{1}{2} \delta_{n,m} \end{aligned}$$

On peut décomposer $u_o(x)$ sur cette base

$$u_0(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n \sin(n\,\pi x)$$

Chaque mode $u_n(t)$ est solution d'un problème indépendant

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} \;+\; (n\pi)^2 u_n(t) & = \; 0 & \quad t > 0 \\ u_n(0) & = \; u_0^n & \end{array} \right.$$

La solution de ce problème est égale à $u_n(t) = u_0^n \exp(-n^2\pi^2 t)$. On en déduit la solution $u(x,t)$ recherchée

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n \exp(-n^2\pi^2 t) \sin(n\pi x) \qquad x \in [0,1],\ t > 0$$

On remarque que

$$||u||^2_{L^2([0,1])} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n)^2 |\exp(-n^2\pi^2 t)|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n)^2 = ||u_0||^2_{L^2([0,1])}$$

On en déduit l'estimation suivante de la solution :

$$||u||_{L^2([0,1])} \leq ||u_0||_{L^2([0,1])}$$

Les exponentielles sont toutes décroissantes, (la série étant par ailleurs absolument convergente), la limite de la solution est

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

L'estimation trouvée est à rapprocher avec celle démontrée dans le cours sur l'équation de la chaleur 2-D.

2.2 - Dans cette question on change le signe de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. La solution du problème devient alors

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n \exp(n^2\pi^2 t) \sin(n\pi x) \qquad x \in [0,1],\ t > 0$$

Dans ce cas, la solution est exponentiellement croissante, on ne peut obtenir d'estimation sur la solution, le problème est mal posé.

Exercice 3. Problèmes stationnaires bien et mal posés.

3.1 -

3.1 -(a) Soit u_1, u_2 deux solutions du problème. $u_1 - u_2$ est solution de

(1)
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\big) = 0 & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

on intègre une première fois l'équation

$$-a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = c$$

On intègre cette équation entre $[0, 1]$

$$u(0) - u(1) \ = \ 0 \ = \ -c \int_0^1 \frac{1}{a(x)}$$

Comme $a(x)$ est strictement positive, on en déduit que $c \ = \ 0$. Donc $\dfrac{\partial u}{\partial x} \ = \ 0$, soit $u(x) = \text{constante} = u(0) = 0$.Finalement

$$u1 \ = \ u_2$$

3.1 -(b) Comme $u(0) \ = \ 0$, on a la relation

$$u(x) \ = \ \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} |\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dt|^2 \ &\leq \ \int_0^x 1dt \int_0^x |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dt \\ &\leq \ x \int_0^1 |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dt \end{aligned}$$

On intègre sur $[0, 1]$ $\qquad |\displaystyle\int_0^1 |u(x)|^2 dx \ \leq \ \frac{1}{2} \int_0^1 |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dt$

On vient de démontrer en 1-D l'inégalité de Poincaré. On multiplie maintenant l'équation par u et on effectue une intégration par parties :

$$+ \int_0^1 a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \ = \ \int_0^1 f(x) u(x) dx$$

Les termes de bord de l'intégration par parties sont nuls car $u(0) \ = u(1) = 0$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le second membre de la relation, on obtient

$$|\int_0^1 a(x) \frac{\partial u}{\partial x}^2 dx|^2 \ = \ |\int_0^1 f u dx|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx \int_0^1 u(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)^2 dx \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}^2 dx$$

On note $a_- \ = \ \inf\limits_{x \in]0,1[} f(x)$. On a alors

$${a_-}^2 |\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}^2 dx|^2 \leq |\int_0^1 a(x) \frac{\partial u}{\partial x}^2 dx|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)^2 dx \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}^2 dx$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, précédemment démontrée, on trouve

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \ \leq \ \frac{1}{2} |\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}^2| \ \leq \ \frac{1}{4{a_-}^2} \int_0^1 f(x)^2 dx$$

3.1 - (c) On intègre une première fois l'équation entre 0 et t

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; c - \int_0^t f(y)dy \;=\; c \,-\, F(t)$$

On note F la primitive de f, qui s'annule en 0. On divise par $a(t)$, qui ne s'annule pas et on intègre sur [0,x]

$$u(x) \;=\; d + \int_0^x \frac{c}{a(t)}dt \,-\, \int_0^x \frac{F(t)}{a(t)}\,dt$$

Les constantes c et d sont déterminées par les deux conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. La première condition aux limites fournit $u(0) = d = 0$. La seconde condition aux limites fournit la relation

$$c\int_0^1 \frac{1}{a(t)}dt \;=\; \int_0^1 \frac{F(t)}{a(t)}\,dt$$

Comme a est strictement positive

$$c \;=\; \frac{\int_0^1 a(t)^{-1}F(t)\,dt}{\int_0^1 a(t)^{-1}dt}$$

c est donc déterminé, ce qui donne la solution explicite du problème.

$$u(x) \;=\; \frac{\int_0^1 a(t)^{-1}F(t)\,dt}{\int_0^1 a(t)^{-1}dt}\int_0^x \frac{1}{a(t)}dt \;-\; \int_0^x \frac{1}{a(t)}F(t)\,dt$$

3.2 - Supposons que $\displaystyle\int_0^1 a(x)^{-1}dx \neq 0$. On a $a(t)\,\dfrac{\partial u}{\partial t} \;=\; c$.
En intégrant sur [0,x] et en utilisant la condition $u(0) = 0$, on obtient :

$$u(x) \;=\; \int_0^x \frac{c}{a(t)}$$

La condition $u(1) = 1$ donne la relation :

$$c\int_0^1 a(t)^{-1}\,dt \;=\; 1$$

La solution du problème est :

$$u(x) \;=\; \frac{\int_0^x a(t)^{-1}dt}{\int_0^1 a(t)^{-1}dt}$$

Le problème admet donc une unique solution.

Pour montrer la condition nécessaire, nous allons démontrer la contraposée. Supposons que $\displaystyle\int_0^1 a(x)^{-1}dx \ = \ 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution u. Les calculs précédemment effectués sont vrais jusqu'à la ligne

$$c\int_0^1 a(t)^{-1}dt \ = \ 1$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 a(t)^{-1}dt \ = \ 0$, on en déduit que :

$$0 \ = \ 1$$

Ce qui est absurde, le problème n'admet par conséquent aucune solution, il est mal posé.

3.3 -

3.3-(a) Si u est solution du problème, il est trivial que $u + c$ - où c est une constante quelconque - est alors également solution du problème. On ne peut donc avoir unicité de la solution. Nous remarquons que la condition $\int_\Omega u\,dx \ = 0$ élimine cette indétermination de la constante.

3.3-(b) Supposons que le problème admette une solution u. On intègre alors l'équation sur Ω. On a

$$\int_\Omega f(x)dx \ = \ -\int_\Omega \Delta u dx \ = \ -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma \ = \ \int_\Gamma g d\sigma$$

On en déduit que $\displaystyle\int_\Omega f dx \ + \ \int_\Gamma g d\sigma \ \ = \ \ 0.$