Séance n°2
Distributions et espaces de Sobolev
Enoncé

9 Novembre 2004

Exercice 1. Masse de Dirac sur $\mathbb{R}$

On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n} \\ n^2(\frac{1}{n} + x), & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n^2(\frac{1}{n} - x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

On considère de plus la distribution de Dirac δ défini par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(x = 0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

1.1 - Etudier la convergence de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ dans $L^2(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

1.2 - Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f_\delta \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x)\varphi(x)d\,x$$

Exercice 2. Equations différentielles

2.1 - Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que si la distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie

$$u' = 0$$

alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $u = C$.

2.2 - Montrer que pour tout $v \in \mathcal{D}'(I)$, l'équation différentielle,

$$u' = v$$

admet une solution $u \in \mathcal{D}'(I)$.

Exercice 3. Exemples de fonction H^1

On note χ_Ω la fonction caractéristique de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

3.1 - Les fonctions

$$u(x) = \chi_{]0,1[}(x) + (2-x)\,\chi_{]1,2[}, \quad v(x) = a\chi_{]0,1[}(x) + b\,\chi_{]1,2[}$$

appartiennent-elles à $H^1(]0,2[)$?

3.2 - Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\Omega = \bar{\Omega_1} \cup \bar{\Omega_2}$ avec Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints. On note $\Gamma = \bar{\Omega_1} \cap \bar{\Omega_2}$. On considère une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ telle que $u = u_1\chi_{\Omega_1} + u_2\chi_{\Omega_2}$ avec $u_i \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_i)$ pour $i = 1, 2$.
Calculer ∇v dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. La fonction v appartient-elle à $H^1(\Omega)$?

3.3 - Etudier la fonction

$$u(x,y) = |\log(\sqrt{x^2+y^2})|^k$$

sur la boule $B_{\mathbb{R}^2}(0,R)$ avec $R < 1$.

Exercice 4. Application trace sur $\mathbb{R}^+$

4.1 - On considère la suite de fonctions $v_n = \exp(-n\,x)$ pour $x \geq 0$ et $n \geq 0$. Etudier sa convergence dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et en déduire que l'on ne peut pas définir d'application trace continue sur cet espace.

4.2 - En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R}^+)$ montrer que l'on peut définir une application trace

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^+) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \gamma_0 u = u(0) \end{array}$$

linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R}^+)$. (On démontra que $v(0) \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}$ pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.)

4.3 - On note $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y > 0\}$. Montrer de la même façon que l'on peut définir une application trace

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0^y : H^1(\mathbb{R}^2_+) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \gamma_0^y u = u(.,0) \end{array}$$

Exercice 5. Changement de variable dans H^1

Soient $\hat{\Omega} \in \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\mathbf{F}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$.

5.1 - Montrer que l'ensemble $\Omega = \mathbf{F}(\hat{\Omega})$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

5.2 - Montrer que l'opérateur de composition

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : H^1(\Omega) & \to & H^1(\hat{\Omega}) \\ v & \mapsto & v \circ \mathbf{F} \end{array}$$

est bien défini, linéaire et continu. En déduire qu'il définit un isomorphisme de $H^1(\Omega)$ sur $H^1(\hat{\Omega})$.