Séance n°2
Distributions et espaces de Sobolev
Corrigé

9 Novembre 2004

Exercice 1. Masse de Dirac sur $\mathbb{R}$

On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n} \\ n^2(\frac{1}{n} + x), & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n^2(\frac{1}{n} - x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

1.1 - Tracer la fonction f_n ! Nous constatons d'abord que

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^2\, dx\right)^{1/2} = \left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2} \to \infty.$$

Ainsi, la suite ne peut pas être convergente dans $L^2(\mathbb{R})$. Le même raisonnement ne marche pas avec la norme L^1 car

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f_n|\, dx = 1.$$

Supposons que la suite soit convergente dans $L^1(\mathbb{R})$ vers une fonction f. La convergence des normes implique que $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. D'autre part, la fonction f coïncide avec la limite presque partout de la suite (f_n), si cette limite existe, ce qui est le cas ici : $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \neq 0$. Nous déduisons alors que $f = 0$ ce qui contredit $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$.

Etudions maintenant la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, qui revient à étudier la convergence de $\langle f_n, \varphi\rangle$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Puisque $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\theta(x)$ tel que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(\theta(x))$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)[\varphi(0) + x\,\varphi'(\theta(x))]\,dx \\ &= \varphi(0)\underbrace{\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx}_{1} + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x\,f_n(x)\,\varphi'(\theta(x))\,dx\end{aligned}$$

En notant $C(\varphi') = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi'(t)|$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x\,f_n(x)\,\varphi^{'}(\theta(x)\,x)\,dx\right| &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n}\max_{t\in\mathbb{R}}|f_n(t)|C(\varphi')\,dx \\ &= \frac{2}{n}C(\varphi'),\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x\,f_n(x)\,\varphi^{'}(\theta(x)\,x)\,dx = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \delta, \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

1.2 - Supposons qu'il existe $f_\delta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tel que

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{1}$$

En choisissant $\varphi(x) = x\,\Phi(x)$ avec $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'identité (1) nous donne

$$\varphi(0) = 0\,\Phi(0) = 0 = \int_{\mathbb{R}} x\,f_\delta(x)\,\Phi(x)\,dx.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \{x\,f_\delta(x)\}\,\Phi(x)\,dx = 0, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On en déduit (par le Lemme de Lebesgue) que

$$x\,f_\delta(x) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}$$

ce qui implique

$$f_\delta(x) = 0, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, en réappliquant l'identité (1),

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

ce qui est impossible car il existe des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ non nulles en $x = 0$ (voir exemple du cours).

Exercice 2. Equations différentielles

2.1 - Soit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(I)$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x)\,dx = 0$ alors il est facile de vérifier que la fonction

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{\varphi}(t)\,dt \tag{2}$$

est C^∞ à support compact dans I, autrement dit $\psi \in \mathcal{D}(I)$. La relation $\psi' = \tilde{\varphi}$ nous donne

$$\langle u, \tilde{\varphi}\rangle = \langle u, \psi'\rangle = -\langle u', \psi\rangle = 0.$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$, alors $\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(I)$, la fonction

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx\right] \phi$$

appartient à $\mathcal{D}(I)$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x)\,dx = 0$. L'identité $\langle u, \tilde{\varphi}\rangle = 0$ nous donne

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi\rangle &= \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx\right] \langle u, \phi\rangle \qquad && \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(I), \\
&= \langle u, \phi\rangle\,\langle 1, \varphi\rangle && \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(I).
\end{aligned}$$

On en déduit $u = C$ avec $C = \langle u, \phi\rangle$.

2.2 - Soit $v \in \mathcal{D}'(I)$, on définit (une primitive) $u \in \mathcal{D}'(I)$ à l'aide de l'identité,

$$\langle u, \varphi\rangle = -\langle v, \psi\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

où la fonction ψ est définie par (2) avec $\tilde{\varphi} = \varphi - \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx\right] \phi$ et $\phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$ (la primitive u dépend donc du choix de ϕ). Il est facile de voir que $u \in \mathcal{D}'(I)$ et que $u' = v$. D'après ce qui précède deux primitives diffèrent d'une constante !

Exercice 3. Exemples de fonction H^1

3.1 -

$$\|u\|^2_{L^2(]0,2[)} = \frac{4}{3} < \infty$$

donc $u \in L^2(]0,2[)$. D'après la formule des sauts, sa dérivée au sens des distributions est $u'(x) = 0\,\chi_{]0,1[}(x) - \chi_{]1,2[}(x)$. Ainsi

$$\|u'\|^2_{L^2(]0,2[)} = 1 < \infty$$

donc $u' \in L^2(]0,2[)$. En conclusion $u \in H^1(]0,2[)$. Concernant la fonction v

$$\|v\|^2_{L^2(]0,2[)} = \sqrt{|b|^2 + |a|^2} < \infty$$

donc $v \in L^2(]0,2[)$ par contre, par la formule des sauts,

$$v' = (b-a)\delta_{x=1}$$

qui n'est pas une fonction de $L^2(0,2)$ pour $b \neq a$.

3.2 - Il est clair que $u \in L^2(\Omega)$. Regardons ses dérivées premières au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, par définition de la dérivée au sens des distributions, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{x_i} u, \varphi \rangle &= -\int_\Omega u\,\partial_{x_i}\varphi \\
&= -\int_{\Omega_1} u_1\,\partial_{x_i}\varphi - \int_{\Omega_1} u_2\,\partial_{x_i}\varphi \\
&\overset{\text{Green}}{=} \int_{\Omega_1} \partial_{x_i}u_1 \cdot \varphi + \int_{\Omega_2} \partial_{x_i}u_2 \cdot \varphi - \int_\Gamma \varphi(u_1 - u_2)\,n_i \\
&\overset{u\in\mathcal{C}^0(\bar\Omega)}{=} \int_{\Omega_1} \partial_{x_i}u_1 \cdot \varphi + \int_{\Omega_2} \partial_{x_i}u_2 \cdot \varphi
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\partial_{x_i}u = \partial_{x_i}u_1\;\chi_{\Omega_1} + \partial_{x_i}u_2\;\chi_{\Omega_2}, \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

On en conclut que $\nabla u \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$. Ainsi $u \in H^1(\Omega)$.

3.3 -

$$u(x,y) = |\log(r)|^k$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\pi \int_0^R r\,|\log(r)|^{2\,k}\,dr$$

pour $k \geq 0$ cette intégrale est convergente.
En coordonnées polaires, le gradient s'écrit

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_r u(r,\theta) \\ \frac{1}{r}\partial_\theta u(r,\theta) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\pi\, k^2 \int_0^R \frac{|\log(r)|^{2\,k-2}}{r}\, dr \\ &\overset{k\neq\frac{1}{2}}{=} \frac{2\pi\, k^2}{2k-1}\left[|\log(r)|^{2\,k-1}\right]_0^R \end{aligned}$$

Ainsi pour $k < \frac{1}{2}$ cette quantité est finie et l'on conclut que $u \in H^1(\Omega)$. Cependant la fonction u possède une singularité en $r = 0$ pour $k \geq 0$.

Exercice 4. Application trace dans $\mathbb{R}^+$

4.1 -

$$\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \frac{1}{2\,n}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. De plus $v_n(0) = 1, \quad \forall\, n \geq 0$, ainsi on ne peut pas espérer avoir une estimation limite de continuité entre $v(0)$ et $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$.

4.2 - On considère tout d'abord une fonction $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a l'identité triviale

$$v^2(t) = v^2(0) + \int_0^t \frac{d}{d\,x}(v^2)(x)\ dx$$

On fait tendre t vers $+\infty$ et on utilise que v est à support compact,

$$\begin{aligned} |v(0)|^2 &= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{d\,x}(v^2)(x)\ dx \\ &= -2\int_0^{+\infty} v(x)\,\frac{d}{d\,x}v(x)\ dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} |v(x)|\,\left|\frac{d}{d\,x}v(x)\right|\ dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(|v(x)|^2 + \left|\frac{d}{d\,x}v(x)\right|^2\right)\ dx \end{aligned}$$

Alors

$$|v(0)|^2 \leq \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^+)} \tag{3}$$

Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$, la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R}^+)$ nous fournit l'existence d'une suite v_n d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = u, \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^+)$$

La suite v_n est de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^+)$, en utilisant l'estimation précédente, on a

$$|v_n(0) - v_m(0)| \leq \|v_n - v_m\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}$$

qui fournit que $v_n(0)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et par complétude convergente vers une limite $u_0 \in \mathbb{R}$ qui ne dépend que de u ($|v_n(0) - w_n(0)\ \leq \|v_n - w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^+)})$.
On définit alors l'application γ_0 qui à u associe u_0 à l'aide du processus limite précédent. Il s'agit évidemment une application linéaire. En passant à la limite dans l'estimation de continuité (3), on en déduit

$$|\gamma_0(u)| \leq \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^+)}$$

Exercice 5. Changement de variable dans H^1

5.1 - Le domaine image est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ en tant qu'image d'un ouvert par une application homéomorphe. La régularité de la frontière est conservée du fait que le graphe image associé au graphe de la frontière $\partial\hat{\Omega}$ est encore $\mathcal{C}^1$ par morceaux grâce à la régularité $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{F}$.
De plus, $\Omega = \mathbf{F}(\hat{\Omega}) \subset \mathbf{F}(\overline{\hat{\Omega}})$ qui est comapct comme image par une application continue du compact $\overline{\hat{\Omega}}$, ce qui permet de conclure que Ω est borné.

5.2 - On rappelle la formule de changement de variable

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{w}(\hat{\mathbf{x}})\, d\hat{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \hat{w} \circ \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}) |\det(\mathrm{D}\,\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}))|\, d\mathbf{x} \tag{4}$$

valable pour $\hat{w} \in L^1(\hat{\Omega})$.
Nous allons appliquer un argument de densité. Considérons tout d'abord une fonction $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, en appliquant la formule (4) à $\hat{w} = v \circ \mathbf{F}$, on en déduit l'estimation suivante

$$\|v \circ \mathbf{F}\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq C_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

avec

$$C_0 = \left(\sup_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} |\det(\mathrm{D}\,\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}))| \right)^{1/2} \leq +\infty$$

En utilisant la dérivation composée, on obtient

$$\nabla(v \circ \mathbf{F})(\hat{\mathbf{x}}) = \big(\nabla v \circ \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}})\big)\ \mathrm{D}\,\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}})$$

Ce qui permet grâce à la formule (4) et la continuité de $\mathrm{D}\,\mathbf{F}$ sur $\bar{\hat{\Omega}}$, de conclure que

$$\|\nabla(v \circ \mathbf{F})\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq C_1 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de $\mathbf{F}$. Ainsi, on a l'estimation

$$\|v \circ \mathbf{F}\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{5}$$

On traite maintenant le cas où $v \in H^1(\Omega)$, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on sait qu'il existe une suite $\{v_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ qui converge vers v dans $H^1(\Omega)$. L'estimation (5) nous permet de conclure que $v_n \circ \mathbf{F}$ est de Cauchy dans $H^1(\hat{\Omega})$ et par complétude convergente vers un élément $\hat{w} \in H^1(\hat{\Omega})$. Ceci est aussi vrai dans $L^2(\hat{\Omega})$. Or la suite $v_n \circ F$ converge presque partout vers $v \circ \mathbf{F}$ du fait que l'image par $\mathbf{F}^{-1}$ d'un ensemble négligeable est aussi négligeable. On en conclut $\hat{w} = v \circ \mathbf{F}$ et l'estimation

$$\|v \circ \mathbf{F}\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

pour $v \in H^1(\Omega)$.