Séance n°3
Formulations variationnelles
Enoncé

16 Novembre 2004

Exercice 1. Problème de transmission

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\Omega = \bar{\Omega_1} \cup \bar{\Omega_2}$ avec Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints. On suppose que les frontières $\Sigma = \bar{\Omega_1} \cap \bar{\Omega_2}$ et $\Gamma = \partial\Omega$ sont régulières. Soient $k_1 > 0, k_2 > 0$, $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, on recherche $u = \sum_{i=1}^{2} u_i\, \chi_{\Omega_i}$ avec

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(k_i \nabla u_i) + u_i = f, & \Omega_i \\ \partial_n u = g, & \Gamma \\ k_1\, \partial_n u_1 = k_2\, \partial_n u_2, & \Sigma \\ u_1 = u_2, & \Sigma \end{array} \right.$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale à Σ pointant vers le domaine Ω_2.

1.1 - Montrer que la formulation variationnelle associée consiste à rechercher $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$(2) \qquad \int_\Omega \big(k\, \nabla u \cdot \nabla v + u\, v\big) = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma k\, g\, v, \forall\, v \in\ H^1(\Omega)$$

où $k = k_1\, \chi_{\Omega_1} + k_2\, \chi_{\Omega_2}$.

1.2 - Montrer à l'aide du théorème de Lax-Milgram que la formulation (2) admet une unique solution.

1.3 - Montrer qu'une solution regulière de cette formulation est aussi solution forte du problème (1).

Exercice 2. Convection-diffusion

Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. On considère un champ de vecteur $\mathbf{u} \in \big(L^\infty(\Omega)\big)^2$ et l'on recherche φ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \mathbf{u} = f, & \Omega \\ \varphi = 0, & \Gamma \end{array} \right. \tag{3}$$

2.1 - Montrer que la formulation variationnelle associée consiste à rechercher $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \mathbf{u}\,\psi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,\psi\, d\mathbf{x}, \quad \forall\,\psi \in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

2.2 - A l'aide du théorème de Lax-Milgram, établir l'existence et l'unicité d'une solution de cette formulation sous la condition

$$\|\mathbf{u}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} < \frac{1}{C_\Omega},$$

où C_Ω désigne la constante dans l'inégalité de Poincaré.

Exercice 3. Système de l'élasticité

Considérons un solide homogène isotrope occupant le domaine régulier borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière Γ. On se place dans l'hypothèse des petits déplacements $\mathbf{u}$ qui sont solutions du système de l'élasticité linéaire,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, & \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \Gamma \end{array} \right. \tag{5}$$

où $\{\sigma_{i,j}\}_{1\le i,j\le 3}(\mathbf{u})$ désigne le tenseur des contraintes élastiques relié au tenseur des déformations

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{D}\,\mathbf{u} + {}^*\,\mathrm{D}\,\mathbf{u}\right)$$

à l'aide de la loi de comportement suivante

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\ \mathrm{I} + 2\mu\,\epsilon(\mathbf{u})$$

où (λ, μ) désigne les coefficients de Lamé. On a utilisé les notations suivantes,

$$\begin{array}{rl} (\operatorname{div}\sigma)_i = \partial_j \sigma_{i,j} & \operatorname{div}\mathbf{u} = \partial_j \mathbf{u}_j \\ (\mathrm{D}\,\mathbf{u})_{i,j} = \partial_j \mathbf{u}_i, & ({}^*\,\mathrm{D}\,\mathbf{u})_{i,j} = \partial_i \mathbf{u}_j \\ \mathrm{I}_{i,j} = \delta_{i,j} & \end{array}$$

3.1 - Montrer que la formulation variationnelle associée consiste à rechercher $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$ tel que

$$\lambda \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u})\,(\operatorname{div} \mathbf{v})\, d\,\mathbf{x} + 2\mu \int_\Omega \epsilon(\mathbf{u}) \cdot \cdot \epsilon(\mathbf{v})\, d\,\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\, d\,\mathbf{x}, \forall\, \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \tag{6}$$

3.2 - Etablir la première inégalité de Korn,

$$\|\epsilon(\mathbf{u})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \geq \frac{1}{2} \|\,\mathrm{D}\,\mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \tag{7}$$

3.3 - Démontrer alors que pour $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ et $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$, cette formulation variationnelle admet une unique solution.

Exercice 4. Minimisation dans un Hilbert

Soit $(V, (.,.))$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(.,.)$ et de norme associée $\|.\|$. Soit $\mathcal{U} \subset V$ une partie convexe fermée non vide.

4.1 - Pour tout $f \in V$, montrer qu'il existe un unique élément $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$\|f - u\| \leq \|f - v\|, \quad \forall\, v \in \mathcal{U} \tag{8}$$

4.2 - Montrer que le point minimum $u \in \mathcal{U}$ est caractérisé par la relation,

$$(f - u, v - u) \leq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{U} \tag{9}$$

4.3 - Soit une forme $a(.,.)$ sur $V \times V$, bilinéaire, symétrique, positive, continue et coercive et ℓ une forme linéaire continue sur V. Montrer que la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) \tag{10}$$

admet un minimum unique $u \in \mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$ caractérisé par la relation,

$$a(u, v - u) \leq \ell(v - u), \quad \forall\, v \in \mathcal{U} \tag{11}$$

4.4 - Montrer l'équivalence entre la formulation variationnelle

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall\, v \in V$$

et le problème de minimisation de J lorsque $\mathcal{U} = V$.