Séance n°3
Formulations variationnelles
Corrigé

16 Novembre 2004

Exercice 1. Formulation variationnelle

1.1 - Soit $v \in H^1(\Omega)$, on pose $v_i = v|_{\Omega_i}$ et l'on multiplie la première équation par v_i ce qui donne après intégration sur Ω_i,

$$-\int_{\Omega_i} \operatorname{div} k_i \nabla u_i \; v_i + \int_{\Omega_i} u_i \, v_i = \int_{\Omega_i} f_i \, v_i$$

avec $f_i = f|_{\Omega_i}$. Nous obtenons par application alors la formule de Green

$$\int_{\Omega_i} k_i \nabla u_i \cdot \nabla v_i + \int_{\Omega_i} u_i \, v_i - \int_{\partial\Omega_i} k_i \partial_{n_i} u_i \, v_i = \int_{\Omega_i} f_i \, v_i$$

En sommant sur i et en posant $k = \sum_i^2 k_i \, \chi_{\Omega_i}$, on obtient, compte tenue de la condition aux limite sur Γ,

$$\int_{\Omega} \big(k \nabla u \cdot \nabla v + u\, v\big) - \int_{\Sigma} \big(k_1 \partial_{n_1} u_1 \, v_1 + k_2 \partial_{n_2} u_2 \, v_2\big) = \int_{\Omega} f \, v + \int_{\Gamma} k \, g \, v$$

Or $v \in H^1(\Omega)$, et l'on sait qu'elle est alors continue à l'interface Σ, de plus $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, ainsi en vertue de la relation de continuité reliant les dérivées normales à l'interface, l'intégrale sur Σ est nulle. On aboutit ainsi à la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \big(k \nabla u \cdot \nabla v + u\, v\big) = \int_{\Omega} f \, v + \int_{\Gamma} k \, g \, v, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$

1.2 - On introduit la forme bilinéaire

$$
\begin{array}{rcl}
a(.,.) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\
(u,v) & \mapsto & a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \big(k\nabla u \cdot \nabla v + u\,v\big)
\end{array}
$$

et la forme linéaire

$$
\begin{array}{rcl}
\ell : H^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\
v & \mapsto & \ell(v) = \displaystyle\int_\Omega f\,v + \int_\Gamma k\,g\,v
\end{array}
$$

L'équation (1) est bien de la forme : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

(2) $$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall\, v \in\; H^1(\Omega)$$

avec $H^1(\Omega)$ un espace de Hilbert. Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut vérifier :

1 - Continuité de a : par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$
\begin{array}{rcl}
|a(u,v)| & \leq & \max(k_1,k_2)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq & \max(k_1,k_2)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
& = & C_a\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla v\|_{H^1(\Omega)}
\end{array}
$$

avec $C_a = \max(k_1,k_2)+1$.

2 - Continuité de ℓ : par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$|\ell(v)| \;\leq\; \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \max(k_1,k_2)\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

Par la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, il existe une constante $C_\Omega > 0$ tq

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_\Omega\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in\; H^1(\Omega).$$

Ainsi,

$$|\ell(v)| \;\leq\; \big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_\Omega \max(k_1,k_2)\|g\|_{L^2(\Gamma)}\big)\,\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

3 - Coercivité de a :

$$
\begin{array}{rcl}
|a(u,u)| & = & \int_\Omega k|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \\
& \geq & \min(k_1,k_2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \\
& \geq & \alpha\|u\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{array}
$$

avec $\alpha = \min(k_1,k_2,1)$.

1.3 - En prenant $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, dans la formulation (1) on déduit

$$\int_{\Omega_i} k_i \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega_i} u\varphi \, dx = \int_{\Omega_i} f\varphi \, dx$$

qui s'écrit aussi en notant $u_i = u_{|\Omega_i}$ et $f_i = f_{|\Omega_i}$

$$\langle k_i \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle + \langle u_i, \varphi \rangle = \langle f_i, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$. Soit, en utilisant la définition de la dérivation au sens des distributions,

$$-\langle \operatorname{div} k_i \nabla u_i, \varphi \rangle + \langle u_i, \varphi \rangle = \langle f_i, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, ce qui s'interprète par

$$-\operatorname{div} k_i \nabla u_i + u_i = f_i \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_i). \tag{3}$$

La relation de continuité $u_1 = u_2$ à l'interface Σ provient du fait que la solution $u \in H^1(\Omega)$. Pour retrouver la condition des sauts sur les dérivées normales nous reprenons la formulation (1) et utilisons la formule de Green dans chaque domaine Ω_i (en supposant que les u_i sont suffisamment régulières pour pouvoir appliquer cette formule). Il vient après la simplification due aux équations (3),

$$\int_\Gamma k\partial_n u \, v \, d\gamma + \int_\Sigma \big(k_1\partial_n u_1 - k_2\partial_n u_2\big)\, v \, d\sigma = \int_\Gamma k \, g \, v \, d\gamma$$

Par densité des traces des fonctions $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma \cup \Gamma)$ on déduit que $\partial_n u = g$ sur Γ et $k_1\partial_n u_1 - k_2\partial_n u_2 = 0$ sur Σ.

Exercice 2. Convection-diffusion

2.1 - On multiplie l'équation par $\psi \in H^1_0(\Omega)$, on intègre sur Ω , puis on utilise la formule de Green. Ainsi on cherche $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \mathbf{u}\, \psi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\, \psi \, d\mathbf{x}, \quad \forall\, \psi \in H^1_0(\Omega) \tag{4}$$

2.2 - On introduit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto a(\varphi,\psi) = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \nabla\varphi \cdot \mathbf{u}\, \psi \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

ainsi que la forme linéaire

$$\begin{aligned} \ell : H^1_0(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \ell(\psi) = \int_\Omega f\, \psi \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Ainsi on recherche $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(\varphi,\psi) = \ell(\psi), \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega)$$

On possède les estimations de continuité suivantes,

$$\begin{array}{rcl} |\ell(\psi)| & \overset{\text{Cauchy}-\text{Schwartz}}{\leq} & \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{H^1(\Omega)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} |a(\varphi,\psi)| & \overset{\text{Cauchy}-\text{Schwartz}}{\leq} & \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & (1+\|\mathbf{u}\|_{L^\infty})\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|\psi\|_{H^1(\Omega)} \end{array}$$

Pour conclure grâce au théorème de Lax-Milgram, on prouve la coercivité de $a(.,.)$,

$$\begin{array}{rcl} |a(\varphi,\varphi)| & \geq & \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \geq & (1 - C_\Omega\|\mathbf{u}\|_{L^\infty})\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & \geq & (1 - C_\Omega\|\mathbf{u}\|_{L^\infty})\,\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C_\Omega > 0$ tq.

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

Cette inégalité implique aussi que

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1+C_\Omega^2)\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui nous pert de conclure

$$|a(\varphi,\varphi)| \;\; \geq \;\; \frac{1 - C_\Omega\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}}{1+C_\Omega^2}\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi pour

$$\|\mathbf{u}\|_{(L^\infty)^2} < \frac{1}{C_\Omega},$$

la constante de coercivité est strictement positive, ce qui permet d'appliquer le théorème.

Exercice 3. Système de l'élasticité

3.1 - On recherche $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$. On multiplie l'équation par $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3$, et on intègre sur Ω,

$$\int_\Omega -\partial_j \sigma_{i,j}(\mathbf{u})\,\mathbf{v}_i\,d\,\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x}$$

$$\overset{\text{Green}}{\rightarrow} \qquad \int_\Omega \sigma_{i,j}(\mathbf{u})\,\partial_j\mathbf{v}_i\,d\,\mathbf{x} - \int_\Gamma (\sigma_{i,j}(\mathbf{u})\,\mathbf{n}_j)\,\underbrace{\mathbf{v}_i}_{=0}\,d\,\Gamma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x}$$

$$\int_\Omega \lambda\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\delta_{i,j}\,\partial_j\mathbf{v}_i + 2\mu\epsilon_{i,j}(\mathbf{u})\,\partial_j\mathbf{v}_i\,d\,\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x}$$

$$\int_\Omega \lambda\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\,(\operatorname{div}\mathbf{v}) + 2\mu\left[\frac{1}{2}\,\epsilon_{i,j}\partial_j\mathbf{v}_i + \frac{1}{2}\,\epsilon_{j,i}\partial_i\mathbf{v}_j\right]\,d\,\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x}$$

$$\epsilon_{i,j} = \epsilon_{j,i} \qquad \lambda\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{u})\,(\operatorname{div}\mathbf{v})\,d\,\mathbf{x} + 2\mu\int_\Omega \epsilon(\mathbf{u})\cdot\cdot\epsilon(\mathbf{v})\,d\,\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x}$$

On définit alors la forme bilinéaire suivante,

$$\begin{array}{rcl} a : (H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \mapsto & a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \lambda\displaystyle\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{u})\,(\operatorname{div}\mathbf{v})\,d\,\mathbf{x} + 2\mu\int_\Omega \epsilon(\mathbf{u})\cdot\cdot\epsilon(\mathbf{v})\,d\,\mathbf{x} \end{array}$$

et la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \ell : (H_0^1(\Omega))^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{v} & \mapsto & \ell(\mathbf{v}) = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x} \end{array}$$

Ainsi on recherche $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$ tel que

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \tag{6}$$

3.2 - On considère $\mathbf{u} \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$,

$$\begin{array}{rcl} \|\epsilon(\mathbf{u})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} & = & \displaystyle\int_\Omega \epsilon_{i,j}(\mathbf{u})\,\epsilon_{i,j}(\mathbf{u})\,d\,\mathbf{x} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\partial_j\mathbf{u}_i|^2 + |\partial_i\mathbf{u}_j|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_j\mathbf{u}_i\,\partial_i\mathbf{u}_j\,d\,\mathbf{x} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{D}\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{u}_i\,\underbrace{\partial_{i,j}\mathbf{u}_j}_{\partial_{j,i}\mathbf{u}_j}\,d\,\mathbf{x} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{D}\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{div}\mathbf{u}|^2\,d\,\mathbf{x} \\ & \geq & \displaystyle\frac{1}{2}\|\operatorname{D}\mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \end{array}$$

Cette inégalité reste valide pour $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$ par densité de $(\mathcal{D}(\Omega))^3$ dans $(H_0^1(\Omega))^3$.

3.3 - On vérifie facilement la continuité de $a(.,.)$ et de $\ell(.)$. La coercivité de $a(.,.)$ est fournie par l'inégalité suivante,

$$\begin{array}{rcl} |a(\mathbf{u},\mathbf{u})| & = & \lambda \,\|\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu\|\epsilon(\mathbf{u})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \\ & \overset{\lambda,\mu\geq 0}{\geq} & \mu\,\|\,\mathrm{D}\,\mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \\ & \overset{\text{Poincare}}{\geq} & \dfrac{\mu}{1+C_\Omega^2}\,\|\mathbf{u}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \end{array}$$

où la constante C_Ω est celle qui intervient dans l'inégalité de Poincaré (5).

Exercice 4. Minimisation dans un Hilbert

4.1 - Posons

$$\mathcal{J} = \inf_{v\in\mathcal{U}} \|f - v\|$$

On considère une suite $\{v_m\}_{m\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ telle que

$$\mathcal{J} = \lim_{m\to+\infty} \|f - v_m\|$$

Montrons que v_m est de Cauchy.

$$\begin{array}{rcl} \|v_p - v_q\|^2 & = & \|v_p - f\|^2 + \|v_q - f\|^2 + 2\,(v_p - f, v_q - f) \\ & \overset{2(a,b)=\frac{1}{2}\|a+b\|^2-\frac{1}{2}\|a-b\|^2}{=} & \|v_p - f\|^2 + \|v_q - f\|^2 + \dfrac{1}{2}\|v_p - v_q\|^2 - \dfrac{1}{2}\|2\,f - (v_p + v_q)\|^2 \end{array}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\|v_p - v_q\|^2 = \|v_p - f\|^2 + \|v_q - f\|^2 - 2\|f - \frac{v_p + v_q}{2}\|^2$$

Or $f - \frac{v_p+v_q}{2} \in \mathcal{U}$, du fait que $\mathcal{U}$ est convexe, ainsi par définition

$$\mathcal{J} \leq \|f - \frac{v_p + v_q}{2}\|$$

ce qui permet de conclure que

$$\frac{1}{2}\|v_p - v_q\|^2 \leq \|v_p - f\|^2 + \|v_q - f\|^2 - 2\,\mathcal{J}^2$$

et ainsi que v_m est de Cauchy. Or $\mathcal{U}$ est fermé, ainsi il existe un élément $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$\mathcal{J} = \|f - u\|$$

L'unicité de u se prouve en considérant deux solutions $u_1 \neq u_2$. On a alors

$$\begin{aligned} \|f - \frac{u_1+u_2}{2}\|^2 &= \|\frac{f-u_1}{2} + \frac{f-u_2}{2}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{J}^2 + \frac{1}{2}(f-u_1, f-u_2) \end{aligned}$$

Or, du fait que $u_1 \neq u_2$, on a

$$(f-u_1, f-u_2) < \|f-u_1\|\|f-u_2\| = \mathcal{J}^2$$

ce qui permet de conclure que

$$\|f - \frac{u_1+u_2}{2}\| < \mathcal{J}$$

qui est en contradiction avec la définition de $\mathcal{J}$.

4.2 - Soit $u \in \mathcal{U}$ une solution et $v \in \mathcal{U}$, comme $\mathcal{U}$ est un ensemble convexe, alors pour $0 \leq t \leq 1$ l'élément $u + t(v-u) \in \mathcal{U}$ et ainsi par définition de l'optimalité de u , on a

$$\begin{aligned} \|f-u\|^2 &\leq \|f - (u + t(v-u))\|^2 \\ &\leq \|f-u\|^2 + t^2\|v-u\|^2 - 2\,t(f-u, v-u) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure facilement que

$$(f-u, v-u) \leq 0, \forall\, v \in \mathcal{U}$$

4.3 - Les propriétés de $a(.,.)$ permettent de construire un produit scalaire dans V tel que $[.,.] = a(.,.)$ et le théorème de représentation de Riesz nous donne l'existence d'un élément $f \in V$ tel que

$$\ell(v) = [f, v], \quad v \in V$$

On note $\|.\|_V$ la norme associée. Ainsi

$$J(v) = \frac{1}{2}\,a(f-v, f-v) - \frac{1}{2}\,a(f,f)$$

et sa minimisation est équivalente à celle de $\|f-v\|_V$.