Séance n°4
Elements finis en dimension 1 et 2

23 Novembre 2004

Exercice 1. Interpolation dans les espaces de Sobolev et estimations d'erreur en dimension 1

Dans ce qui suit, $p(x)$ et $q(x)$ désignent deux fonctions continues par morceaux définies sur $I\ =]a, b[$ et vérifiant :

$$0 < p_* \leq p(x) \leq p^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I$$

$$0 < q_* \leq q(x) \leq q^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I$$

$f(x)$ désigne une fonction donnée de $L^2(I)$, α et β sont deux réels positifs ou nuls. On s'intéresse à la résolution du problème aux limites (P) :

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) \ + \ q\,u & = \ f \quad x \in I \\ p(b)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) \ + \ \beta\,u(b) & = \ 0 \\ -p(a)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a) \ + \ \beta\,u(a) & = \ 0 \end{cases}$$

1.1 - Ecrire la formulation variationnelle de ce problème et démontrer l'existence et l'unicité de solutions $u \in H^1(I)$.

1.2 - On suppose que
$$(p, q, f) \in C^1(\bar{I}) \times C^0(\bar{I}) \times L^2(I).$$
Montrer alors que la solution du problème variationnel appartient à $H^2(I)$ et vérifie les équations du problème (P).

1.3 - On s'intéresse à l'approximation de u par éléments finis. Pour cela, on introduit le maillage de pas $h = \dfrac{b-a}{N}$ défini par les points :
$$x_j = a + j\,h \qquad j = 0, 1, ..., N$$
On considère l'espace des éléments finis P_1 de Lagrange défini par :
$$V_h = \{v_h \in C^0([a, b]) \text{ tel que } v_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1,\ j = 0, 1, ..., N-1\}.$$
Donner l'expression des fonctions $w_j \in V_h$, $0 \leq j \leq N$, définies par
$$w_j(x_i) = \delta_{i,j}$$
et vérifier qu'elles forment une base de V_h.

Nous définissons l'opérateur d'interpolation Π_h de $V = H^1(I)$ dans V_h par
$$\forall v \in V \qquad \Pi_h v(x) = \sum_{j=0}^{N} v(x_j)\, w_j(x)$$
La suite de l'exercice a pour but d'obtenir une estimation de l'erreur d'interpolation $v - \Pi_h v$ dans $H^1(I)$ et d'en déduire des estimations d'erreur correspondant à l'approximation de u par éléments finis à l'aide de l'espace d'approximation V_h.

1.4 - En utilisant l'identité
$$v(x) = v(x_i) + (x - x_i)v'(x_i) + \int_{x_i}^{x} (x_i - t)v''(t)\, dt$$
pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h tel que
$$\forall v \in H^2(I) \qquad \|v - \Pi_h v\|_{L^2(I)} \leq C\, h^2 \|v\|_{H^2(I)}$$
$$\forall v \in H^2(I) \qquad \left\| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\Pi_h v}{\mathrm{d}x} \right\|_{L^2(I)} \leq C\, h \|v\|_{H^2(I)}$$

1.5 - On désigne par $u_h \in V_h$ la solution du problème variationnel de la question 1 obtenu en remplaçant $H^1(I)$ par V_h. Montrer que sous les conditions de régularité de la question 2, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h tq.
$$\|u - u_h\|_{H^1(I)} \leq C\, h.$$

1.6 - Dans cette question, nous allons illustrer l'importance d'avoir v suffisamment régulière (dans $H^2(I)$) afin d'avoir une erreur d'interpolation en $O(h)$. Soit

$$v(x) = x^\alpha \quad \forall x \in I$$

Pour quelles valeurs de α, v appartient à $H^1(I)$? On se place dans ce cas, calculer :

$$\int_0^h \left| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\Pi_h v}{\mathrm{d}x} \right|^2 dx.$$

Conclure.

Exercice 2. Eléments finis P_1 en dimension 2

Soit K un triangle de $\mathbf{R}^2$ de sommets $(S_1, S_2, S_3) \in (\mathbf{R}^2)^3$, non-alignés.

2.1 - Montrer qu'il existe un et un seul triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in P_1^3$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}^2, \qquad & \lambda_1(x)\, S_1 + \lambda_2(x)\, S_2 + \lambda_3(x)\, S_3 = x \\ \forall x \in \mathbf{R}^2, \qquad & \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) = 1 \end{aligned}$$

qui sont par définition les coordonnées barycentriques associées à K. Caractériser le triangle K à l'aide des fonctions $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et démontrer que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ forme une base de P_1.

2.2 - Soit un domaine Ω et $(T_l)_{l=1..L}$ une partition du domaine Ω, où

1. T_l est un triangle d'intérieur ($\mathrm{Int}(T_l)$) non vide

2. $\mathrm{Int}(T_l) \cap \mathrm{Int}(T_k) = \emptyset$ et $\cup_{l=1,L} T_l = \bar{\Omega}$

3. Toute arête d'un triangle est soit sur le bord Γ, soit une arête d'un autre triangle.

On note $(M_I)_{I=1,N}$ l'ensemble de tous les sommets des triangles T_l et on introduit l'espace suivant :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ telle que } v_h|_{T_l} \in P_1\}$$

2.3 - Expliquer pourquoi $V_h \subset H^1(\Omega)$.

2.4 - Montrer qu'il existe une unique fonction $W_I \in V_h$ telle que :

$$W_I(M_J) = \delta_{IJ} \quad \forall J = 1, .., N.$$

On représentera graphiquement cette fonction, et on la reliera aux coordonnées barycentriques.

2.5 - Montrer que les W_I, $1 \leq I \leq N$ forment une base de V_h.

Exercice 3. Eléments finis P_2 en dimension 1

On s'intéresse à l'approximation de par éléments finis P_2. Pour cela, on introduit le maillage de pas $h = \dfrac{b-a}{N}$ défini par les points :

$$x_j \;=\; a + j\,h \qquad j = 0, 1, ..., N$$

On désigne par P_2 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On introduit l'espace de dimension finie défini par :

$$V_h \;=\; \{v_h \in C^0([a,b]) \text{ tel que } v_h|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_2,\; j = 0, 1, ..., N-1\}$$

3.1 - Exhiber une base adéquate $\{w_j(x), 0 \leq j \leq N\} \cup \{w_j^1(x), 0 \leq j \leq N-1\}$ de l'espace V_h telle que :

$$\begin{array}{ll} w_j(x_i) \;=\; \delta_{i,j} & w_j(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}) \;=\; 0 \\ w_j^1(x_i) \;=\; 0 & w_j^1(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}) \;=\; \delta_{i,j} \end{array}$$

3.2 - Représenter sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ les deux fonctions de base w_j et w_j^1. Quelle est la différence entre ces deux types de fonctions de base ?