Séance n°4
Elements finis en dimension 1 et 2
Corrigé

13 Novembre 2004

Exercice 1. Interpolation dans les espaces de Sobolev et estimations d'erreur en dimension 1

Dans ce qui suit, $p(x)$ et $q(x)$ désignent deux fonctions continues par morceaux définies sur $I =]a,b[$ et vérifiant :

$$0 < p_* \leq p(x) \leq p^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I$$

$$0 < q_* \leq q(x) \leq q^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I$$

$f(x)$ désigne une fonction donnée de $L^2(I)$, α et β sont deux réels positifs ou nuls. On s'intéresse à la résolution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) \ + \ q\,u & = \ f \quad x \in I \\ p(b)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) \ + \ \beta\,u(b) & = \ 0 \\ -p(a)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a) \ + \ \beta\,u(a) & = \ 0 \end{cases}$$

1.1 - On multiplite l'équation par une fonction test v, et on effectue une intégration par parties

$$\int_I p\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \ + \ \int_I q\,u\,v \ - \ p(b)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) \ + \ p(a)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a) \ = \ \int_I f\,v$$

En utilisant les conditions aux limites en a et b, on obtient la formulation variationnelle du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\bar{I}) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\bar{I}) \quad \displaystyle\int_I p\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \;+\; \int_I q\,u\,v \;+\; \beta\,u(b)\,v(b) \;+\; \beta\,u(a)\,v(a) \;=\; \int_I f\,v \end{cases}$$

En faisant une intégration par parties sur la formulation variationnelle, on obtient

$$\forall v \in H^1(\bar{I}) \int_I [-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x})\,dx + q\,u - f]v + [p(b)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b)+\beta u(b)]v(b) + [-p(a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a)+\beta u(a)]v(a) \;=\; 0$$

En choisissant v $\in D(I)$, les termes de bord sont nuls, on obtient alors

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) \;+\; q\,u \;=\; f \quad \text{au sens des distributions}$$

En choisissant une fonction test dans $H^1(\bar{I})$, qui vaut 1 en b et 0 en a, on obtient :

$$p(b)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) + \beta u(b) \;=\; 0$$

De la même manière, on retrouve la condition au limite en a. On a ainsi montré l'équivalence de la formulation forte avec la formulation variationnelle. L'existence et l'unicité se démontrent en utilisant Lax-Milgram. On vérifie la continuité de $a(u,v)$

$$a(u,v) \;=\; \int_I p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \;+\; \int_I qu\,v$$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)|^2 &\le 2p^{*2}\Big(\int_I \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)^2 \;+\; 2q^{*2}\Big(\int_I u\,v\Big)^2 \\
&\le 2p^{*2}\Big(\int_I \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}^2\Big)\Big(\int_I \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}^2\Big) \;+\; 2q^{*2}\Big(\int_I u^2\Big)\Big(\int_I v^2\Big) \\
&\le 2\,max(p^{*2},q^{*2})\Big(\int_I \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}^2 + \int_I u^2\Big)\Big(\int_I \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}^2 + \int_I v^2\Big) \\
|a(u,v)| &\le \sqrt{2\,max(p^{*2},q^{*2})}\,||u||_{H^1}||v||_{H^1}
\end{aligned}$$

La coercivité de a est immédiate :

$$a(u,u) \;=\; \int_I p\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}^2 \;+\; \int_I q\,u^2 \;\ge\; min(p_*,q_*)||u||_{H^1}$$

Le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer, on a existence et unicité de la solution.

1.2 - Pour $k = 1$, on a l'expression suivante de $w_j, \quad 0 \leq j \leq N$

$$\begin{cases} w_j(x) = \dfrac{x_{j-1} - x_j}{x_{j-1} - x_j} & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ w_j(x) = \dfrac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_j} & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ w_j(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour k quelconque, on considère la fonction $w_j \in V_h$ qui vaut 1 en x_j, 0 en $x_{j-1},\ x_{j-1}^{(l)}, \quad 1 \leq l \leq k-1$ et 0 en $x_{j+1},\ x_j^{(l)}, \quad 1 \leq l \leq k-1$. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} w_j(x) = \dfrac{\prod_{l=1}^{k-1} x - x_{j-1}^{(l)}}{\prod_{l=1}^{k-1} x_j - x_{j-1}^{(l)}} \dfrac{x_{j-1} - x}{x_{j-1} - x_j} & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ w_j(x) = \dfrac{\prod_{l=1}^{k-1} x - x_j^{(l)}}{\prod_{l=1}^{k-1} x_j - x_j^{(l)}} \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ w_j(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On vérifie que $w_j(x_j) = 1$ ce qui assure la continuité de w_j. Posons

$$\begin{cases} w_j^{(l)}(x) = \dfrac{\prod_{m=1, m\neq l}^{k-1} x - x_j^{(m)}}{\prod_{m=1, m\neq l}^{k-1} x_j^{(l)} - x_j^{(m)}} \dfrac{(x - x_j)(x - x_{j-1})}{(x_j^{(l)} - x_j)(x_j^{(l)} - x_{j-1})} & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ w_j^{(l)}(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$w_j^{(l)}$ possède les propriétés suivantes :

$$w_j^{(l)}(x_k) = 0 \quad \forall k = 0, .., N$$

$$w_j^{(l)}(x_k^{(m)}) = \delta_{l,m}\delta_{k,j} \quad \forall k = 0, .., N-1 \quad \forall m = 1, .., k-1$$

Démontrons dans un premier temps, que ces fonctions forment une base libre. Soit une combinaison lináire de coefficients λ_j $\lambda_j^{(l)}$ telle que :

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, w_j(x) \; + \; \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_j^{(l)} w_j^{(l)}(x) \; = \; 0 \qquad \forall x \in I$$

L'évaluation en $x = x_i$ donne

$$\lambda_i \; = \; 0$$

L'évaluation en $x = x_i^{(m)}$ donne

$$\lambda_i^{(m)} \; = \; 0$$

Les coefficients sont tous nuls, ce qui prouve que la base est libre.

Démontrons dans un second temps, que ces fontions forment une base génératrice de l'espace V_h. Soit $v \in V_h$, v est un polynôme de degré k sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. Or un polynôme de degré k est déterminé de manière unique par les valeurs qu'il prend en k+1 points distincts 2 à 2. On en déduit que :

$$v(x) \; = \; v(x_j) w_j(x) \; + \; v(x_{j+1}) \, w_{j+1}(x) \; + \; \sum_{l=1}^{k-1} v(x_j^{(l)}) w_j^{(l)}(x) \qquad \forall x \in [x_j, x_{j+1})$$

. On a ainsi décomposé v dans la base exhibée. C'est donc une base génératrice.

L'opérateur d'interpolation est défini pour $v \in H^1(I)$ comme

$$\Pi_h v(x) \; = \; \sum_{j=0}^{N} v(x_j) w_j(x) \; + \; \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} v(x_j^{(l)}) w_j^{(l)}(x)$$

Il vérifie trivialement les propriétés demandées.

1.3 - Montrons l'équivalence des normes. On cherche d'abord à démontrer l'inégalité de Poincaré-Friedrichs :

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \; \leq \; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}^2 dx \; + \; (\int_0^1 u(x) dx)^2 \qquad \forall u \in H^1(\hat{I})$$

Soit $u \in H^1(\hat{I})$, on note

$$v(x) \; = \; u(x) \; - \; \int_0^1 u(x) dx$$

On part de l'égalité :

$$v(x) - v(t) \; = \; \int_x^t \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} ds$$

En intégrant sur [0,1]

$$v(x) \; = \; \int_0^1 (\int_x^t \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} ds) dt \text{ car } \int_0^1 v(t) dt \; = \; 0$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
v(x)^2 &\leq \int_0^1 (\int_t^x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} ds)^2 dt \\
&\leq \int_0^1 (\int_t^x 1^2 ds)(\int_t^x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}^2 ds) dt \\
&\leq \int_0^1 |x-t| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}^2 ds dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}^2 dt \\
\int_0^1 v(x)^2 dx &\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}^2 dx
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 v(x)^2 dx \;=\; \int_0^1 u(x)^2 dx \;-\; 2(\int_0^1 u(x)dx)^2 \;+\; (\int_0^1 u(x)dx)^2$$

On en déduit l'inégalité souhaitée :

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \;\leq\; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}^2 dx \;+\; (\int_0^1 u(x)dx)^2$$

Pour $u \in H^{k+1}(\hat{I})$, on a la suite d'inégalités :

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \;\leq\; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}^2 dx \;+\; (\int_0^1 u(x)dx)^2$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l}(x)^2 dx \;\leq\; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^{l+1} u}{\mathrm{d}x^{l+1}}^2 dx \;+\; (\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l}(x)dx)^2$$

$$\dots$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}(x)^2 dx \;\leq\; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^{k+1} u}{\mathrm{d}x^{k+1}}^2 dx \;+\; (\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}(x)dx)^2$$

En combinant ces inégalités, on trouve :

$$||u||^2_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; (k+2)\,|v|^2_{k+1,\hat{I}} \;+\; \sum_{l=0}^{k} (l+1)\,(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l}(x)dx)^2$$

L'inégalité

$$||u||_{k+1,\hat{I}} \;\geq\; |v|^2_{k+1,\hat{I}} \;+\; \sum_{l=0}^{k} (\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l}(x)dx)^2$$

est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc l'encadrement :

$$\frac{1}{k+2}||u||^2_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; |v|^2_{k+1,\hat{I}} \;+\; \sum_{l=0}^{k}(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l}(x)dx)^2 \;\leq\; ||u||^2_{k+1,\hat{I}}$$

La norme

$$|||u|||_{k+1,\hat{I}} \;=\; \Big[|v|^2_{k+1,\hat{I}} \;+\; \sum_{l=0}^{k}(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^l u}{\mathrm{d}x^l}(x)dx)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme $||.||_{k+1,\hat{I}}$.

Soit $v \in H^{k+1}(\hat{I})$. On note $p \in P_k$ le polynôme tel que :

$$\int_{\hat{I}} \frac{\mathrm{d}^l p}{\mathrm{d}x^l}dx \;=\; \int_{\hat{I}} \frac{\mathrm{d}^l v}{\mathrm{d}x^l}dx \qquad \forall l = 0..k$$

Un tel polynôme existe et est unique car les coefficients (a_i) tels que $p \;=\; \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ sont solutions d'un système linéaire triangulaire dont les termes diagonaux sont égaux à $i!$, non-nuls par conséquent.

Comme $p \in P_k$, $\frac{\mathrm{d}^{k+1}p}{\mathrm{d}x^{k+1}} \;=\; 0$. On a donc :

$$|||v-p|||_{k+1,\hat{I}} \;=\; |v|^2_{k+1,\hat{I}}$$

Du fait de l'équivalence des normes, on obtient l'inégalité :

$$\forall v \in H^{k+1}(\hat{I}) \qquad \inf_{p\in P_k} ||v+p||_{k+1,\hat{I}} \leq \hat{C}|v|_{k+1,\hat{I}}$$

1.4 - Soit $\hat{\Pi}$ un opérateur lináire continu tel que :

$$\forall p \in P_k, \qquad \hat{\Pi}p \;=\; p$$

D'après le résultat montré à la question précédente, $\exists p \in P_k$ tel que :

$$||v+p||_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; C^1|v|_{k+1,\hat{I}}$$

Par continuité de $\hat{\Pi}$, on a

$$||\hat{\Pi}v+p||_{k+1,\hat{I}} \;=\; ||\hat{\Pi}v+\hat{\Pi}p||_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; C^2||v+p||_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; C^1C^2|v|_{k+1,\hat{I}}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$||(v+p)-(\hat{\Pi}v+p)||_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; ||v+p||_{k+1,\hat{I}} \;+\; ||\hat{\Pi}v+p||_{k+1,\hat{I}} \;\leq\; C|v|_{k+1,\hat{I}}$$

Réciproquement, supposons $\hat{\Pi}$ un opérateur lináire continu tel que :

$$\forall v \in H^{k+1}(\hat{I}), \qquad ||v-\hat{\Pi}v||^2_{k+1,\hat{I}} \leq C|v|^2_{k+1,\hat{I}}$$

On applique l'inégalité pour $v \;=\; p \quad p \in P_k$. Comme $|p|_{k+1,\hat{I}} \;=\; 0$, on a

$$\forall p \in P_k, \qquad \hat{\Pi}p \;=\; p$$

1.5 - On note

$$F_q(\hat{x}) \;=\; x_q(1-\hat{x}) \;+\; x_{q+1}\hat{x}$$

F_q est trivialement une bijection, et la dérivée est égale à $dF_q \;=\; h$. On définit $\Pi_q \circ F_q \;=\; \hat{\Pi}$. Un changement de variables fournit :

$$\int_{I_q} |u|^2_{m,I_q} dx \;=\; \int_{\hat{I}} h^{-m} |\hat{u}|_{m,\hat{I}}\, d\hat{x}$$

Soit $v \in H^{k+1}(I_q) \qquad m \leq k+1$, on a

$$\begin{aligned} |v \,-\, \Pi_q\, v|^2_{m,I_q} \;&=\; h^{-m}\, |\hat{v} \,-\, \hat{\Pi}\hat{v}|^2_{m,\hat{I}} \\ &\leq\; h^{-m}\, ||\hat{v} \,-\, \hat{\Pi}\hat{v}||^2_{k+1,\hat{I}} \\ &\leq\; Ch^{-m}\, |\hat{v}|^2_{k+1,\hat{I}} \\ &\leq\; Ch^{k+1-m}\, |v|^2_{k+1,I_q} \end{aligned}$$

1.6 - $\hat{\Pi}$ se déduit de Π_q par simple changement de variable. On introduit, les fonctions de base sur l'intervalle unitè $\hat{I}$:

$$\hat{w}_0(\hat{x}) \;=\; \frac{\prod_{m=1}^{k} (m \,-\, k\,\hat{x})}{k!}$$

$$\hat{w}_l(\hat{x}) \;=\; \frac{\prod_{m=0}^{l-1} (k\,\hat{x} \,-\, m) \prod_{m=l+1}^{k} (m \,-\, k\,\hat{x})}{l!(k-l)!} \qquad l \;=\; 1,..,(k-1)$$

$$\hat{w}_k(\hat{x}) \;=\; \frac{\prod_{m=0}^{k-1} (k\,\hat{x} \,-\, m)}{k!}$$

$\hat{\Pi}$ est défini par la relation :

$$\hat{\Pi}\hat{v} \;=\; \sum_{m=0}^{k} \hat{v}(\frac{m}{k})\hat{w}_m$$

1.7 - Soit $v \in H^{k+1}(I)$ .On somme la relation (2) sur tous les intervalles $I_q \;=\; [x_j, x_{j+1}]$:

$$\Big(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(v \,-\, \Pi_h\, v)|^2 dx\,) \;\leq\; C\, h^{k+1-m} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\frac{\mathrm{d}^{k+1} v}{\mathrm{d}x^{k+1}}|^2 dx$$

On en déduit l'inégalité demandée

$$\Big(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(v \,-\, \Pi_h\, v)|^2 dx\,\Big) \;\leq\; C\, h^{k+1-m} ||v||_{H^{k+1}(I)}$$

$m \,=\, 0$ fournit l'estimation L^2

$$||v \,-\, \Pi_h\, v||_{L^2(I)} \;\leq\; C\, h^{k+1} ||v||_{L^2(I)}$$

$m \,=\, 1$ fournit l'estimation H^1

$$||v \,-\, \Pi_h\, v||_{H^1(I)} \;\leq\; C\, h^{k} ||v||_{H^{k+1}(I)}$$

1.8 - La solution discrète est définie par

$$\forall v \in V_h \qquad a(u_h, v) \;=\; (f, v)$$

où a est la forme bilinéaire introduite à la question 1.
La solution u est définie par

$$\forall v \in H^1(I) \qquad a(u, v) \;=\; (f, v)$$

Comme $V_h \subset H^1(I)$, on fait la différence pour $v \in V_h$:

$$\forall v \in V_h \qquad a(u_h - u, v) \;=\; 0$$

$$\forall v \in V_h \qquad a(\Pi_h u - u, v) \;=\; a(\Pi_h\, u - u_h, v)$$

On choisit la fonction test $v \;=\; \Pi_h\, u \;-\; u_h$. On a alors

$$a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) \;=\; a(\Pi_h\, u - u_h, \Pi_h u - u_h)$$

On va utiliser la coercivité et la continuité de a démontrée à la question 1.

$$\alpha ||\Pi_h\, u - u_h||^2_{H^1(I)} \;\leq\; |a(\Pi_h\, u {-} u_h, \Pi_h u {-} u_h)| \;=\; |a(\Pi_h u {-} u, \Pi_h u {-} u_h)| \;\leq\; C ||\Pi_h\, u - u||_{H^1(I)} ||||\Pi_h\, u - u_h||_{H}$$

D'où

$$||\Pi_h\, u \,-\, u_h||_{H^1(I)} \;\leq\; C ||\Pi_h\, u \,-\, u||_{H^1(I)}$$

A l'aide de l'inégalité triangulaire

$$||u \,-\, u_h||_{H^1(I)} \;\leq\; ||u \,-\, \Pi_h\, u||_{H^1(I)} + ||\Pi_h\, u \,-\, u_h||_{H^1(I)} \;\leq\; (C+1) ||\Pi_h\, u \,-\, u||_{H^1(I)}$$

Or $||\Pi_h\, u \,-\, u||_{H^1(I)} \;\leq\; C^1 h^k ||u||_{H^{k+1}(I)} \;\leq\; C^2 h^k ||f||_{H^{k-1}(I)}$
On obtient l'estimation d'erreur désirée :

$$||u - u_h||_{H^1(I)} \;\leq\; C\, h^k$$

La constante C fait intervenir la constante de coercivité α, la constante de la continuité de a, la constante de l'erreur d'interpolation, et $||f||_{H^{k-1}(I)}$. Elle ne dépend pas de h.

Exercice 2. Espaces d'éléments finis en dimension 2

2.1 - On suppose l'existence du triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, on va montrer l'unicité. Nous allons prouver d'abord que :

$$\lambda_1(a_1) \;=\; 1 \qquad \lambda_2(a_1) \;=\; 0 \qquad \lambda_3(a_1) \;=\; 0$$

Supposons par l'absurde que $\lambda_1(a_1) \neq 1$. Nous avons alors :

$$a_1 \;=\; \frac{\lambda_2(a_1)\,a_2 \;+\; \lambda_3(a_1)\,a_3}{1-\lambda_1(a_1)} \qquad (\lambda_2(a_1), \lambda_3(a_1)) \neq (0,0)$$

a_1, a_2 et a_3 sont donc alignés, ce qui est exclu. Donc $\lambda_1(a_1) \;=\; 1$.
Supposons par l'absurde que $\lambda_2(a_1) \neq 0$. On a alors

$$\lambda_2(a_1)(a_2 \;-\; a_3) \;=\; 0$$

Les points a_2 et a_3 sont confondus, ce qui est exclu. On a donc $\lambda_2(a_1) \;=\; \lambda_3(a_1) \;=\; 0$. On démontre de la même manière que

$$\lambda_1(a_2) \;=\; 0 \quad \lambda_2(a_2) \;=\; 1 \quad \lambda_3(a_2) \;=\; 0 \qquad \lambda_1(a_3) \;=\; 0 \quad \lambda_2(a_3) \;=\; 0 \quad \lambda_3(a_3) \;=\; 1$$

On cherche λ_1 de la forme

$$\lambda_1(x,y) \;=\; \alpha\,(x-x_2) \;+\; \beta(y-y_2)+\gamma$$

$\lambda_1(a_2) \;=\; 0$ donne $\gamma \;=\; 0$
$\lambda_1(a_3) \;=\; 0$ donne $\alpha(x_3-x_2)+\beta(y_3-y_2) \;=\; 0$
Donc λ_1 est de la forme :

$$\lambda_1(x,y) \;=\; C\left[(y_2-y_3)\,(x-x_2) \;+\; (x_3-x_2)\,(y-y_2)\right]$$

La constante C est déterminée de manière unique par l'équation $\lambda_1(a_1) \;=\; 1$:

$$\lambda_1(x,y) \;=\; \frac{(y_2-y_3)\,(x-x_2) \;+\; (x_3-x_2)\,(y-y_2)}{(y_2-y_3)\,(x_1-x_2) \;+\; (x_3-x_2)\,(y_1-y_2)}$$

Le dénominateur est proportionnel à l'aire du triangle, qui est non-nulle car les points ne sont pas alignés. De la même manière, on trouve une expression unique pour λ_2 et λ_3. On vérifie que le triplet obtenu vérifie bien les propriétés demandées, ce qui prouve l'existence.
Le triangle K est caractérisé par

$$\lambda_1 \;\geq\; 0 \qquad \lambda_2 \;\geq\; 0 \qquad \lambda_3 \;\geq\; 0$$

$1, x, y$ est une base de P^1 générée par les fonctions $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est donc une famille génératrice de P^1 et comme $\dim P_1 \;=\; 3$, c'est aussi une famille libre. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ forme une base de P_1.

2.2 -

$$\dim P_k \; = \; \frac{(k+1)(k+2)}{2} \; = \; \mathrm{Card} M_k$$

2.3 - Soit $\mu \in M_k$. Supposons qu'il existe un polynôme $p_\mu \in P_k$ tel que :

$$p_\mu(a_\nu) \; = \; \delta_{\mu\nu}, \qquad \forall \nu \in M_k$$

Si $\mu_3 > 0$, p_μ est nul sur k+1 points de la ligne $\lambda_3 \; = \; 0$. Or p_μ est un polynôme d'une seule variable de degré k sur cette ligne. On peut donc factoriser p_μ par λ_3 :

$$p_\mu \; = \; \lambda_3 Q(x,y)$$

Le polynôme Q est dans P_{k-1}. Si $\mu_3 > 1$, ce polynôme est nul sur k points de la ligne $\lambda_3 \; = \; \frac{1}{k}$, il est donc factorisable par $\lambda_3\, k - 1$. En itérant le procédé, sur λ_3 et sur les autres coordonnées barycentriques, on trouve p_μ de la forme :

$$p_\mu \; = \; C(k\,\lambda_1\,)...(k\,\lambda_1 \; - \; \mu_1 + 1)(k\,\lambda_2\,)...(k\,\lambda_2 \; - \; \mu_2 + 1)(k\,\lambda_3\,)...(k\,\lambda_3 \; - \; \mu_3 + 1)$$

$$p_\mu \; = \; C \prod_{i=0}^{\mu_1 - 1} (k\,\lambda_1 \; - \; i) \prod_{j=0}^{\mu_2 - 1} (k\,\lambda_2 \; - \; j) \prod_{k=0}^{\mu_3 - 1} (k\,\lambda_3 \; - \; k)$$

C est une constante afin d'avoir $p \in P_k$. La constante C est déterminée par l'équation $p_\mu(a_\mu) \; = \; 1$:

$$p_\mu \; = \; \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{\mu_1 - 1} (k\,\lambda_1 \; - \; i) \prod_{j=0}^{\mu_2 - 1} (k\,\lambda_2 \; - \; j) \prod_{k=0}^{\mu_3 - 1} (k\,\lambda_3 \; - \; k)}{\mu_1!\mu_2!\mu_3!}$$

Par construction $p_\mu(a_\nu) \; = \; \delta_{\nu\mu}$, et il est unique.

Prouvons que les polynômes p_μ forment une famille libre. Soit une combinaison linéaire :

$$\sum \alpha_\mu p_\mu(x) \; = \; 0$$

Pour $x \; = \; a_\nu$, on trouve $\alpha_\nu \; = \; 0$. Donc les composantes α_μ sont toutes nulles. La famille des polynômes $p_\mu \quad \mu \in M_k$ est libre. De plus le cardinal de M_k étant égal à la dimension de l'espace P_k, la famille est également génératrice.

2.4 - Supposons que les deux polynômes v_1 v_2 coincident sur $k+1$ points de I :

$$v_1(\xi_l) \; = \; v_2(\xi_l)$$

Or v_1 et v_2 sont des polynômes de degré k à une seule variable sur le segment I. Un polynôme de degré k étant déterminé de manière unique par les $k+1$ valeurs qu'il prend, on a

$$v_1|_I \; = \; v_2|_I$$

v est donc continue sur K. v est également dans $H^1(K_1)$ et $H^1(K_2)$. Par conséquent v est dans $H^1(K)$ (cf TD2).

2.5 - On distingue les fonctions de base associées aux sommets, celles associées aux arêtes et les fonctions de base intérieures.