

Séance n°5
Pratique des éléments finis
Corrigé

30 Novembre 2004

Exercice 1. Calcul des matrices élémentaires

1.1 - Evaluons l'intégrale à l'aide de la formule de quadrature donnée

$$\int_{T_l} (\lambda_1)^2 dx = \frac{\text{Aire}(T_l)}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 \right)$$

$$\int_{T_l} (\lambda_1)^2 dx = \frac{\text{Aire}(T_l)}{6}$$

Par symétrie nous aurons :

$$\int_{T_l} (\lambda_2)^2 dx = \int_{T_l} (\lambda_3)^2 dx = \frac{\text{Aire}(T_l)}{6}$$

Les termes croisés sont égaux à

$$\int_{T_l} \lambda_1 \lambda_2 dx = \int_{T_l} \lambda_1 \lambda_3 dx = \int_{T_l} \lambda_2 \lambda_3 dx = \frac{\text{Aire}(T_l)}{12}$$

$$M_h^l = \frac{\text{Aire}(T_l)}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 - On calcule le gradient des coordonnées barycentriques :

$$\nabla \lambda_1 = \frac{1}{2\text{Aire}(T_l)} \begin{vmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{vmatrix}$$

On reconnaît l'expression d'une normale non-unitaire de l'arête opposée au sommet 1. On note

$$\vec{n}_1 = (y_2 - y_3, x_3 - x_2)$$

$$\vec{n}_2 = (y_3 - y_1, x_1 - x_3)$$

$$\vec{n}_3 = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$$

Ce sont les normales des arêtes opposées aux sommets S_1, S_2 et S_3 . Ces normales sont toutes dirigées vers l'intérieur du triangle T_l et de norme la longueur de l'arête. On a

$$\nabla \lambda_i = \frac{1}{2\text{Aire}(T_l)} \vec{n}_i$$

Les gradients des fonctions de base sont constants, il suffit donc de multiplier par l'aire du triangle pour calculer les intégrales de la matrice de rigidité.

$$(R_h^l)_{i,j} = \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}{4\text{Aire}(T_l)}$$

Exercice 2. Application sur maillage régulier

2.1 - $\dim V_h = 9$, les degrés de liberté sont associés aux sommets du maillage.

2.2 - On note u_i les composantes du vecteur U_h . On a la décomposition :

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^9 u_i w_i(x, y)$$

En injectant cette expression dans la formulation variationnelle, on obtient par bilinéarité de a :

$$\sum_{i=1}^9 u_i a(w_i, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$$

On choisit $v = w_j$, on obtient ainsi neuf équations :

$$\sum_{i=1}^9 u_i a(w_i, w_j) = l(w_j) \quad j = 1..9$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$A_h U_h = F_h$$

La matrice du système linéaire s'écrit

$$(A_h)_{i,j} = a(w_i, w_j) = \alpha \int_{\Omega} w_i w_j dx + \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j dx$$

Le second membre :

$$(F_h)_j = l(w_j) = \int_{\Omega} f w_j dx$$

On décompose la matrice sous la forme

$$A_h = \alpha M_h + R_h$$

où on appelle matrice de masse :

$$M_h = \int_{\Omega} w_i w_j dx$$

et matrice de rigidité :

$$R_h = \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j dx$$

2.3 - Sur les lignes 1, 3, 7 et 9 (associées aux quatre coins du carré), on a 3 termes non-nuls et 6 zéros. Sur les lignes 2, 4, 6 et 8 (associées aux milieux des côtés du carré), on a 6 termes non-nuls et 3 zéros. Sur la ligne 5 (associée au centre du carré), on a 5 termes non-nuls et 4 zéros.

2.4 - On note h la longueur d'une arête horizontale. On calcule d'abord les matrices élémentaires sur le triangle rectangle isocèle T_1 de sommets $(0,0)$, $(h,0)$ et $(0,h)$. Comme

Aire $(T_1) = \frac{h^2}{2}$, on a :

$$M_h^1 = \frac{h^2}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a l'expression des normales :

$$\vec{n}_1 = (-h, -h) \quad \vec{n}_2 = (h, 0) \quad \vec{n}_3 = (0, h)$$

On en déduit la matrice de rigidité élémentaire du triangle T_1 :

$$R_h^1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'entrée (5,5) de la matrice M_h s'écrit :

$$(M_h)_{5,5} = \int_{T_2} w_5 w_5 dx + \int_{T_3} w_5 w_5 dx + \int_{T_6} w_5 w_5 dx + \int_{T_7} w_5 w_5 dx$$

$$(M_h)_{5,5} = 4 \int_{T_2} w_5 w_5 dx$$

$$(M_h)_{5,5} = \frac{h^2}{3}$$

L'entrée (5,2) de la matrice M_h s'écrit :

$$(M_h)_{5,2} = \int_{T_2} w_5 w_2 dx + \int_{T_3} w_5 w_2 dx$$

$$(M_h)_{5,2} = \frac{h^2}{12}$$

La cinquième ligne de M_h vaut :

$$M_h(5, :) = \frac{h^2}{12}(0, 1, 0, 1, 4, 1, 0, 1, 0)$$

On fait le même raisonnement pour obtenir la cinquième ligne de R_h :

$$R_h(5, :) = (0, -1, 0, -1, 4, -1, 0, -1, 0)$$

On reconnaît le motif élémentaire du laplacien en différences finies.

2.5 - $\dim V_h = 6$ si on élimine les degrés de liberté sur le côté inférieur de Ω . Mais on choisit l'approche de garder ces degrés de liberté et de remplacer chaque équation associée par l'équation

$$u = 0$$

Au niveau matriciel, on remplace la ligne associée par une ligne de zéros avec 1 placé sur la diagonale. Les matrices R_h , M_h gardent la même expression. La matrice A_h garde la même expression, excepté pour les trois premières lignes qui sont remplies de zéros avec des un sur la diagonale. La cinquième ligne ne change pas. Il est néanmoins intéressant de mettre un zéro sur la colonne 2, afin de conserver la symétrie de A_h .