

# Séance n°6

## Alternative de Fredholm

Corrigé

7 Décembre 2004

### Exercice 1. Un exemple en dimension 1

**1.1** - L'existence de  $K$  résulte du théorème d'identification de Riesz et de la continuité de l'application trace.  $K$  est évidemment autoadjoint puisque

$$(Ku, v)_{H^1(\mathbb{R}^+)} = (u, Kv)_{H^1(\mathbb{R}^+)}, \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^+),$$

Enfin, il est de rang 1 car  $\forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^+)$ , il existe une combinaison linéaire de  $u$  et  $v$  qui s'annule en 0 :

$$au(0) + bv(0) = 0$$

d'où  $aKu + bKv = 0$ .

**1.2** - Si  $K$  admettait deux vecteurs propres linéairement indépendants, il ne serait pas de rang 1 mais au moins 2...  $Ku = \lambda u$  donne

$$\begin{cases} -u'' + u = 0 & (\mathbb{R}^+) \\ u'(0) + \lambda u(0) = 0 \end{cases}$$

que l'on résoud facilement dans  $H^1(\mathbb{R}^+)$  et on trouve :  $\lambda = 1$  et  $u = e^{-x}$ .

**1.3** - Le problème suivant :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que } \begin{cases} -u'' + u = f & (\mathbb{R}^+) \\ u'(0) + \alpha u(0) = 0 \end{cases}$$

admet la formulation variationnelle suivante :

$$u \in H^1(\mathbb{R}^+), \quad \int_{\mathbb{R}^+} (u'v' + uv)dx - \alpha u(0)v(0) = \int_{\mathbb{R}^+} fvdx$$

pour tout  $v \in H^1(\mathbb{R}^+)$ . Cela s'écrit aussi, en utilisant le théorème d'identification de Riesz :

$$u - \alpha Ku = g$$

avec

$$(g, v)_{H^1(\mathbb{R}^+)} = \int_{\mathbb{R}^+} f v dx.$$

D'après l'alternative de Fredholm, si  $\alpha \neq 1$ , le problème admet donc une solution unique  $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$ .

**1.4** - Si  $\alpha = 1$ , (toujours d'après l'alternative de Fredholm) le problème admet une solution si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^+} f e^{-x} dx = 0.$$

Cette solution n'est pas unique puisque on peut lui rajouter  $ae^{-x}$ .

## Exercice 2. Vibrations acoustiques

**2.1** - La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - k^2 \int_{\Omega} u v d\gamma = \int_{\partial\Omega} g v d\gamma, \end{cases}$$

On ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram car on n'a pas la coercivité.

**2.2** - Idem premier exo (Riesz).

**2.3** - On a par Cauchy-Schwarz,

$$\|Ku\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|Ku\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

d'où le résultat. Si  $u_n$  est une suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut en extraire une sous-suite (encore notée  $u_n$ ) convergente dans  $L^2(\Omega)$ . Or :

$$\|Ku_n - Ku_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Donc  $Ku_n$  est de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$ . Cela prouve que  $K$  est un opérateur compact.

**2.4** - Le problème (1) décrit aussi : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que :

$$u - (1 + k^2)Ku = g$$

où

$$(g, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} g v \, d\gamma$$

pour tout  $v$ . D'après l'alternative de Fredholm, il est bien posé si et seulement si  $1/(1+k^2)$  n'est pas une valeur propre de  $K$ .

**2.5** - On résoud le problème suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta p + p = \lambda p & (\Omega) \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

On trouve

$$\lambda = 1 + \frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{j^2\pi^2}{h^2}$$

pour tous les entiers  $m$ ,  $n$  et  $j$ . Les valeurs propres sont les inverses. Elles forment donc une suite tendant vers 0.

**2.6** - On suppose  $k = 0$ . On veut alors inverser  $I - K$  et 1 est valeur propre de  $K$  associée à la fonction constante sur  $\Omega$ . D'après l'alternative de Fredholm le problème admet une unique solution  $u$  dans l'orthogonal du noyau, donc telle que

$$\int_{\Omega} u \, dx = 0$$

si et seulement si le second membre est aussi dans l'orthogonal du noyau, ce qui donne :

$$\int_{\partial\Omega} g \, d\gamma = 0.$$

## Exercice 3. Un contre-exemple en domaine non borné

**3.1** - Il suffit de considérer une suite de la forme

$$u_n(x) = u(x_1 + n, x_2, \dots, x_N)$$

où  $u$  est à support compact. Ses normes  $L^2$  et  $H^1$  sont constantes. Mais si elle convergeait dans  $L^2$ , ce serait forcément vers 0, d'où la contradiction.

**3.2** - L'existence vient encore de Riesz. On a :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|Au\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Si  $A$  était compact, l'injection de  $H^1$  dans  $L^2$  le serait aussi !

**3.3** - En utilisant la transformation de Fourier, on voit que  $Au - \lambda u = f$  s'écrit  $-\Delta u + u - \lambda u = -\Delta f + f$  d'où  $(|\xi|^2 + 1 - \lambda)\hat{u} = (|\xi|^2 + 1)\hat{f}$ . Si  $f = 0$ ,  $\hat{u}$  est nulle p.p. donc  $u = 0$ . cela prouve que  $A$  n'admet aucune valeur propre.

**3.4** - Si  $f \neq 0$ , cela montre aussi que l'opérateur  $A - \lambda I$  n'est pas inversible lorsque  $\lambda > 1$ . On voit bien que l'on ne peut pas appliquer l'alternative de Fredholm dans ce cas. Le problème n'est pas bien posé bien qu'on ne soit pas sur une valeur propre.