

Séance n°7  
Alternative de Fredholm (suite)

14 Décembre 2004

### Exercice 1. Théorème de prolongement unique

L'énoncé de ce théorème est le suivant : Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in H^1(\Omega)$  tel que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et tel qu'il existe une constante  $K > 0$  pour laquelle

$$|\Delta u(x)| \leq K (|u(x)| + |\nabla u(x)|) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Alors, si  $u$  s'annule sur une partie ouverte non vide de  $\Omega$ ,  $u$  s'annule sur tout  $\Omega$ .

Nous allons démontrer ce théorème dans le cas particulier de la dimension 1 de l'espace c.à.d.  $\Omega = ]a, b[$ .

**1.1** - Soit  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $u(x_0) = u'(x_0) = 0$  et soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \subset ]a, b[$ . Montrer, en utilisant un développement de Taylor avec reste intégral, que

$$|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 \leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^3\right) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |u''(t)|^2 dt$$

pour  $x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ .

**1.2** - Dédurre qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $u = 0$  sur  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ .

**1.3** - Conclure!

## Exercice 2. Application au problème de vibrations acoustiques

On reprend ici l'exemple de l'exercice 2 du TD6, où l'on suppose qu'une partie du fluide occupant un domaine  $D \subset \Omega$  est absorbante. On note  $\sigma_0 > 0$  son coefficient d'absorption et on définit la fonction d'absorption  $\sigma$  dans tout  $\Omega$  par

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La pression  $p \in H^1(\Omega)$  vérifie alors

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta p + k^2 p + i\sigma k p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**2.1** - Récrire la formulation variationnelle de ce problème (les fonctions sont maintenant à valeurs complexes).

**2.2** - En utilisant le résultat de l'exercice 1, montrer l'unicité de la solution pour tout nombre d'onde  $k \neq 0$ .

**2.3** - Conclure sur le caractère bien posé du problème pour tout nombre d'onde  $k \neq 0$ .

## Exercice 3. Inégalités de Poincaré

**3.1** - Soit  $\Omega$  un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ . En raisonnant par l'absurde et en utilisant l'injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , montrer qu'il existe une constante  $C_\Omega > 0$  telle que

$$(2) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

**3.2** - On suppose en plus que  $\Omega$  est connexe. Montrer (en suivant le même raisonnement) que le résultat reste vrai si  $H_0^1(\Omega)$  est remplacé par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

où  $\Gamma_0$  désigne une partie de mesure non nulle de la frontière  $\partial\Omega$ .

**3.3** - Soit  $\ell$  une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ . Quelle propriété doit vérifier  $\ell$  pour que le résultat de la question 3.1 reste vrai si  $H_0^1(\Omega)$  est remplacé par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \ell(v) = 0\}.$$

## Exercice 4. Application aux modes de vibrations propres des membranes

Soit  $\Omega$  une membrane encastrée en une partie  $\Gamma_0$  de son bord. On note  $\rho > 0$  sa rigidité et  $u$  le champ de déplacement vertical. On suppose qu'il existe deux constantes  $\rho_* > 0$  et  $\rho^* > 0$  telles que

$$\rho_* \leq \rho(x) \leq \rho^* \quad \text{sur } \Omega.$$

On appelle valeur propre et mode propre de vibration de la membrane tout réel  $\lambda$  et fonction  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u \neq 0$ , vérifiant

$$(3) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \rho \nabla u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

**4.1** - Montrer que la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

définit un produit scalaire sur

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

**4.2** - Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est équivalente à la norme  $H^1(\Omega)$ .

Dans toute la suite on muni l'espace  $V$  du produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$ .

**4.3** - Montrer qu'il existe un opérateur  $T$  compact autoadjoint sur  $V$  tel que

$$a(Tu, v) = (u, v)_{L^2} \quad \forall u, v \in V.$$

**4.4** - Dédurre qu'il existe une suite croissante de valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  strictement positives tendant vers  $+\infty$  et de modes propres  $(u_n)_{n \geq 1}$  formant une base hilbertienne de  $V$  (muni du produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$ ).

**4.5** - Montrer que la famille des vecteurs propres  $v_n = \sqrt{\lambda_n} u_n$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ .

**4.6** - Pour tout  $u \in V$ ,  $u \neq 0$ , on définit le quotient de Rayleigh par

$$\mathcal{R}(u) = a(u, u) / (u, u)_{L^2(\Omega)}.$$

Montrer que

$$\lambda_1 = \min_{u \in V, u \neq 0} \mathcal{R}(u)$$

$$\lambda_n = \min_{u \in V_{n-1}^\perp, u \neq 0} \mathcal{R}(u)$$

où  $V_n$  désigne l'espace vectoriel engendré par  $v_1, \dots, v_n$ .

**4.7** - On dénote par  $E_n$  un sous espace de  $V$  de dimension  $n$ . Dédurre que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\lambda_n = \min_{E_n \subset V} \left( \max_{u \in E_n, u \neq 0} \mathcal{R}(u) \right).$$

**4.8** - Dédurre que les valeurs propres croissent lorsque la taille de  $\Gamma_0$  augmente!

**4.9** - Se convaincre que les résultats des questions 4.1-4.8 restent valides pour toute forme bilinéaire symétrique  $a$ , coercive sur  $V$ .