Séance n^{o}9
Schémas pour l'équation de transport

11 Janvier 2005

Dans les exercices 1 à 3, on s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a > 0) \tag{1}$$

par des schémas aux différences finies de pas de temps Δt sur une grille spatiale régulière de pas Δx. On pose $\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Exercice 1. Schémas d'ordre un

On considère les trois schémas suivants :
Le schéma explicite centré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \ ,$$

le schéma implicite centré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right)$$

et le schéma explicite décentré vers l'amont

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \ .$$

Vous avez vu en cours que le premier schéma est inconditionnellement instable.

1.1 - Dans les deux autres cas, étudier l'ordre du schéma, puis calculer le coefficient d'amplification et étudier la stabilité du schéma.

1.2 - Etudier ensuite les erreurs d'amplitude et de phase du schéma (on obtiendra un équivalent de ces erreurs pour $\xi \Delta x$ petit).

1.3 - Discuter des avantages et inconvénients des différents schémas.

Exercice 2. Le schéma de Lax-Wendroff

Soit $\bar{u}$ une solution régulière de l'équation de transport.

2.1 - Montrer que

$$\bar{u}\left(x_j, t_{n+1}\right) = \bar{u}\left(x_j, t_n\right) - a\Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\left(x_j, t_n\right) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) + O(\Delta t^3)\,.$$

2.2 - Indiquer comment, à partir de cette égalité, on peut construire le schéma suivant (Lax-Wendroff)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)\ ,$$

et étudier son ordre en distinguant le cas $\lambda = 1$.

2.3 - Calculer le coefficient d'amplification et en déduire la stabilité du schéma sous condition CFL.

2.4 - Etudier l'erreur de phase et d'amplitude du schéma.

Exercice 3. Le schéma saute-mouton

On considère le schéma saute-mouton pour approcher l'équation de transport

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \lambda\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\ ,$$

où $n \geq 1$ et u_j^0 et u_j^1 sont donnés.

3.1 - Quel est l'ordre de ce schéma ?

3.2 - On suppose que

$$u_j^0 = U_0 \exp(i\xi j\Delta x) \quad \text{et} \quad u_j^1 = U_1 \exp(i\xi j\Delta x) \ \ \forall j \, .$$

Montrer que la solution du schéma peut s'écrire sous la forme

$$u_j^n = U_n \exp(i\xi j\Delta x) \ \ \forall j$$

avec

$$U_n = A\,(r_+)^n + B\,(r_-)^n \ ,$$

avec r_+ et r_- solutions d'une équation que l'on précisera. En déduire une condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma.

3.3 - On suppose $\lambda \leq 1$. Montrer que la solution est la superposition d'une onde se propageant dans le même sens que la solution exacte et d'un onde se propageant en sens inverse (onde "parasite"). Comparer la vitesse de phase de ces ondes avec la vitesse de phase de la solution exacte.

3.4 - On suppose que U_0 est donné et que le schéma décentré amont est utilisé pour calculer U_1. Calculer A et B dans ce cas et montrer que l'onde parasite est de module petit devant celui de l'onde principale lorsque $\xi\Delta x \ll 1$.