Séance n°9
Schémas pour l'équation de transport

11 Janvier 2005

Exercice 1. Schémas d'ordre un

1.1 - On considère $\bar{u}$ une solution régulière de l'équation de transport, et on effectue les développements limités suivants pour le schéma implicite centré (les restes sont tous exprimés en $O(\Delta t)$, car on suppose que l'on travaille avec $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ fixé)

$$\bar{u}(x_j, t_{n+1}) = \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O(\Delta t^3)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x_{j+1}, t_{n+1}) &= \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) + \Delta x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\
&+ \Delta x \, \Delta t \, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x_{j-1}, t_{n+1}) &= \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) - \Delta x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\
&- \Delta x \, \Delta t \, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

et l'on calcule

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\bar{u}_j^{n+1} - \left(\bar{u}_j^n - \frac{\lambda}{2} \left(\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1} \right) \right) \right]$$

avec par définition $\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t_n)$. On trouve

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + a\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)(x_j, t_n) + \Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}\right)(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)\,.$$

Puisque $\bar{u}$ est solution exacte de l'équation de transport, le premier terme du membre de droite est nul. Le schéma implicite centré est donc d'ordre 1 exactement car le terme$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$n'est pas nul.

Pour le schéma décentré vers l'amont, on utilise

$$\bar{u}(x_{j-1}, t_{n+1}) = \bar{u}(x_j, t_n) - \Delta x\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)$$

et l'on calcule

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left[\bar{u}_j^{n+1} - \left(\bar{u}_j^n - \lambda\left(\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n\right)\right)\right]\,.$$

On trouve

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + a\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \lambda\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)$$

Le premier terme du membre de droite est nul. La parenthèse du deuxième terme peut aussi s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{a^2}{\lambda}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)(x_j, t_n)\,.$$

Or la solution de l'équation de transport vérifie aussi l'équation

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0\,.$$

Le schéma est donc exactement d'ordre 1 si $\lambda \neq 1$. Si $\lambda = 1$, le schéma devient

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$$

équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte. Le schéma est donc dans ce cas d'ordre infini.

Considérons pour ces deux schémas une solution valant au temps t_n

$$u_j^n = \exp(i\xi j\Delta x)$$

et cherchons à l'instant t_{n+1} la solution sous la forme

$$u_j^{n+1} = g(\xi, \Delta t, \Delta x)u_j^n\,.$$

En reportant dans le schéma implicite centré, on aboutit à l'équation

$$g = 1 - \frac{\lambda}{2}\left(g\,\exp(i\xi\Delta x) - g\,\exp(-i\xi\Delta x)\right)$$

soit
$$g = \frac{1}{1 + i\lambda \sin(\xi \Delta x)}$$
et donc $\sup |g| \leq 1$ pour toute valeur de λ. Le schéma est donc inconditionnellement stable.

Pour ce qui est du schéma explicite décentré vers l'amont, on aboutit à l'équation suivante sur g
$$g = 1 - \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x))$$
et donc
$$|g|^2 = (1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x))^2 + \lambda^2 \sin(\xi \Delta x)^2$$
En développant cette expression, on obtient
$$|g|^2 = 1 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda(1-\lambda)\cos(\xi\Delta x)$$
soit finalement
$$|g|^2 = 1 - 2\lambda(1-\lambda)(1 - \cos(\xi\Delta x))$$
Si $\lambda \leq 1$, le terme $2\lambda(1-\lambda)(1-\cos(\xi\Delta x))$ est toujours positif et donc $\sup |g| = 1$, le schéma est donc stable.
Si $\lambda > 1$, le terme $2\lambda(1-\lambda)(1-\cos(\xi\Delta x))$ est négatif et on a $\sup |g| = \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda - 1)}$. Le schéma est donc instable.

1.2 - Pour ce qui est de l'erreur d'amplitude du schéma implicite centré, nous avons
$$r_a = \frac{1 - (1 + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x))^{-1/2}}{\Delta t}.$$
Pour $\xi\Delta x$ petit, on a alors $r_a \sim \frac{\lambda^2}{2\Delta t}\xi^2\Delta x^2$ soit $r_a \sim \frac{1}{2}a\lambda\xi^2\Delta x$. L'erreur d'amplitude est donc d'ordre un.

Pour ce qui est de l'erreur de phase du schéma centré implicite
$$r_p = \frac{a\Delta t\xi + Arg(g)}{\Delta t} = \frac{a\Delta t\xi + \arctan(-\lambda\sin(\xi\Delta x))}{\Delta t}.$$
En utilisant le développement limité de arctan au voisinage de 0 ($\arctan\varepsilon \approx \varepsilon - \varepsilon^3/3$), on aboutit à
$$r_p \sim \frac{a\Delta t\xi - \lambda\left(\xi\Delta x - \frac{\xi^3\Delta x^3}{6}\right) + \lambda^3\frac{\xi^3\Delta x^3}{3}}{\Delta t} = \frac{\lambda(1+2\lambda^2)\frac{\xi^3\Delta x^3}{6}}{\Delta t}.$$
En utilisant la définition de λ, il vient $r_p \sim \frac{1}{6}a(1+2\lambda^2)\xi^3\Delta x^2$. L'erreur de phase est donc d'ordre deux.

L'erreur d'amplitude du schéma décentré est approchée par
$$r_a \sim \frac{1 - \left[1 - \lambda\left(1-\lambda\right)\frac{\xi^2\Delta x^2}{2}\right]}{\Delta t}$$

soit $r_a \sim \frac{1}{2}a(1-\lambda)\xi^2\Delta x$. L'erreur d'amplitude est donc d'ordre un.

L'erreur de phase du schéma décentré est quant à elle calculée par

$$r_p = \frac{a\Delta t\xi + \arctan\left(\frac{-\lambda\sin(\xi\Delta x)}{1-\lambda(1-\cos(\xi\Delta x))}\right)}{\Delta t}.$$

Le développement limité de l'argument de arctan donne $-\lambda(\xi\Delta x-(\xi\Delta x)^3/6)(1+\lambda(\xi\Delta x)^2/2)$, soit en ne gardant que les termes d'ordre au plus trois $-\lambda[\xi\Delta x+(\xi\Delta x)^3(\lambda/2-1/6)]$. Finalement, nous obtenons

$$r_p \sim \frac{a\Delta t\xi - \lambda[\xi\Delta x+(\xi\Delta x)^3(\lambda/2-1/6)]+\lambda^3(\xi\Delta x)^3/3}{\Delta t} = \frac{\lambda(\xi\Delta x)^3(1/6-\lambda/2+\lambda^2/3)}{\Delta t}.$$

En utilisant la définition de λ, nous avons alors $r_p \sim a\xi^3(1/6-\lambda/2+\lambda^2/3)$, sauf bien sûr pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 1/2$, qui sont les racines du polynôme en λ à l'intérieur des parenthèses. Pour $\lambda = 1$, le schéma est exact et pour $\lambda = 1/2$, un petit calcul montre que $g = \cos(\xi\Delta x/2)\exp(-i\xi\Delta x/2)$. Donc lorsque $\xi\Delta x \le \pi$, l'argument de g vaut $-\xi\Delta x/2$ et l'erreur de phase est nulle.

1.3 - Discussion : le schéma explicite centré est toujours instable et n'est donc jamais utilisé, le schéma implicite centré est toujours stable et peut donc être employé avec de grands pas de temps, mais il nécessite une résolution de système linéaire à chaque pas de temps ; le schéma décentré est explicite mais stable sous une condition qui limite le pas de temps.

Exercice 2. Le schéma de Lax-Wendroff

2.1 - On a

$$\bar{u}(x_j,t_{n+1}) = \bar{u}(x_j,t_n) + \Delta t\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^3).$$

Mais $\bar{u}$ étant solution de l'équation de transport, on a

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(x_j,t_n) = -a\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}(x_j,t_n)$$

et par dérivation de l'équation de transport

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t_n) = a^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t_n),$$

d'où le résultat.

2.2 - A partir de l'égalité proposée, on approche $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n)$ et $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n)$ par des différences centrées sur x_j :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) = \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$
$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) = \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

ce qui permet de construire le schéma de Lax-Wendroff et de déduire qu'il est d'ordre deux si $\lambda \neq 1$.

Pour $\lambda = 1$, le schéma s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \,,$$

équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte ; le schéma est donc d'ordre infini pour $\lambda = 1$.

2.3 - Considérons pour ce schéma une solution valant au temps t_n

$$u_j^n = \exp(i\xi j \Delta x)$$

et cherchons à l'instant t_{n+1} la solution sous la forme

$$u_j^{n+1} = g(\xi, \Delta t, \Delta x)\, u_j^n \,.$$

En reportant dans le schéma de Lax-Wendroff, on aboutit à l'équation

$$g = 1 - \frac{\lambda}{2}\left(\exp(i\xi\Delta x) - \exp(-i\xi\Delta x)\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(\exp(i\xi\Delta x) - 2 + \exp(-i\xi\Delta x)\right)$$

soit

$$g = 1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x) - \lambda^2(1 - \cos(\xi\Delta x)) \,.$$

Etudions le module de g

$$\begin{aligned}
|g|^2 &= 1 - 2\lambda^2(1-\cos(\xi\Delta x)) + \lambda^4(1-\cos(\xi\Delta x))^2 + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) \\
&= 1 - \lambda^2(2 - 2\cos(\xi\Delta x) + \cos^2(\xi\Delta x) - 1) + \lambda^4(1-\cos(\xi\Delta x))^2 \\
&= 1 + (\lambda^4 - \lambda^2)(1-\cos(\xi\Delta x))^2 \,.
\end{aligned}$$

Si $\lambda \leq 1$ alors $\lambda^4 - \lambda^2 \leq 0$ et $\sup|g| = 1$; le schéma est donc stable.
Si $\lambda > 1$ alors $\sup|g| = \sqrt{1 + 4(\lambda^4 - \lambda^2)}$ et le schéma est instable.

2.4 - Les erreurs d'amplitude et de phase sont données dans le polycopié (page 60 de l'édition 2003/2004)

$$r_a \sim \frac{a\lambda(1-\lambda^2)}{8}\xi^4\Delta x^3$$

et

$$r_p \sim \frac{a(1-\lambda^2)}{6}\xi^3\Delta x^2$$

Le schéma de Lax-Wendroff est donc très peu dissipatif.

Exercice 3. Le schéma saute-mouton

3.1 - Le schéma est d'ordre deux en temps et en espace, comme peut le montrer sa réécriture sous forme de différences centrées

$$\frac{(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})}{2\Delta t} + a\frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0\,.$$

3.2 - Une récurrence prouve que u_j^n se met sous la forme demandée avec la relation

$$U_{n+1} = U_{n-1} - \lambda(\exp(i\xi\Delta x) - \exp(-i\xi\Delta x))U_n\,,$$

soit

$$U_{n+1} = -2i\lambda\sin(\xi\Delta x)U_n + U_{n-1}\,.$$

On sait que la solution d'une telle récurrence à trois termes se met sous la forme

$$U_n = A(r_+)^n + B(r_-)^n$$

lorsque les racines r_+ et r_- de l'équation caractéristique

$$r^2 + 2i\lambda\sin(\xi\Delta x)r - 1$$

sont distinctes (ce qui est le cas en général).

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta = 1 - \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x)\,.$$

Si $\lambda > 1$, alors le discriminant est strictement négatif pour certaines valeurs de ξ. Pour ces valeurs, les deux racines de l'équation sont imaginaires pures et leur produit vaut -1. L'une des deux racines est donc de module strictement supérieur à un, et le schéma est donc instable.
Si $\lambda \leq 1$, alors le discriminant est toujours positif ou nul et les racines valent

$$r_\pm = -i\lambda\sin(\xi\Delta x) \pm \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x)}$$

et sont de module 1 ; le schéma est alors stable.

3.3 - Dans le cas $\lambda \leq 1$, les racines étant de module unité, on peut écrire

$$r_+ = \exp(-i\omega\Delta t)$$

avec

$$\cos(\omega\Delta t) = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x)} \ \text{ et } \ \sin(\omega\Delta t) = \lambda\sin(\xi\Delta x)\,.$$

Le produit $r_+ r_-$ valant -1, on a alors

$$r_- = -\exp(i\omega\Delta t)\,.$$

La solution s'exprime alors

$$u_j^n = A\exp[i(\xi\, j\Delta x - \omega\, n\Delta t)] + (-1)^n B\exp[i(\xi\, j\Delta x + \omega\, n\Delta t)]\,.$$

Nous avons donc deux ondes se propageant en sens inverse l'une de l'autre à la vitesse de phase $\pm\frac{\omega}{\xi}$. Pour $\xi\Delta x$ petit, la relation $\sin(\omega\Delta t) = \lambda\sin(\xi\Delta x)$ donne le développement limité suivant

$$\omega \sim \frac{\lambda\xi\Delta x - \lambda(1-\lambda^2)(\xi\Delta x)^3/6}{\Delta t} = a\xi - a\frac{\xi^3}{6}(1-\lambda^2)\Delta x^2\,.$$

La vitesse de phase de l'onde approchant l'onde réelle est donc égale à a plus un terme d'erreur de vitesse de phase de l'ordre de Δx^2.

3.4 - On a les relations

$$U_0 = A + B$$

et

$$U_1 = Ar_+ + Br_- = U_0[1 - \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x))]$$

La solution de ce système est donnée par

$$A = \frac{U_0}{2\cos(\omega\Delta t)}[1 - \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x)) + \exp(i\omega\Delta t)]$$

et

$$B = \frac{U_0}{2\cos(\omega\Delta t)}[-1 + \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x)) + \exp(-i\omega\Delta t)]\,.$$

Pour $\xi\Delta x$ (et donc $\omega\Delta t$) petits, on a alors

$$A \sim U_0$$

et

$$B \sim \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}(\xi\Delta x)^2 U_0$$

ce qui est le résultat annoncé.