Séance n^{o}10

18 Janvier 2005

Exercice 1. Equation de transport scalaire en dimension N

Soit c une fonction continue de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$. On s'intéresse à l'équation de transport linéaire à coefficients variables

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t) \cdot \nabla u = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^N\,,\ t > 0 \tag{1}$$

assortie de la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x)\,.$$

1.1 - Nous cherchons ici formellement les courbes

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ t & \longmapsto & X(t) \end{array}$$

le long desquelles la solution de (1) soit constante, c'est-à-dire telles que $u(X(t),t)$ ne dépende pas de t. Montrer que les courbes définies par

$$\frac{dX}{dt}(t) = c(X(t),t) \tag{2}$$

répondent à ce critère.

On notera $X(t;x_0,t_0)$ la courbe caractéristique solution (quand elle existe) de (2) et vérifiant la condition

$$X(t_0) = x_0\,. \tag{3}$$

1.2 - Soit un point (x,t) de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe une unique caractéristique passant par ce point, c'est-à-dire telle que $X(t) = x$. Montrer alors que la solution de (1) vaut nécessairement en ce point

$$u(x,t) = u_0(X(0;x,t))\,. \tag{4}$$

Le reste de cet exercice est consacré à la démonstration de l'existence des courbes caractéristiques sous la condition de Lipschitz uniforme

$$\exists L > 0 \,/\, \forall t \geq 0,\ \forall (x,y)\, \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\,,\ |c(x,t) - c(y,t)| \leq L\,|x-y|$$

et à la résolution de (1) et de certaines variantes.

1.3 - On appelle solution classique de (2)-(3) sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0+T]$ une fonction $C^1([t_0,t_0+T])$ vérifiant (2) pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$ ainsi que (3).
Montrer que l'existence d'une solution classique (2)-(3) sur $[t_0, t_0+T]$ équivaut à l'existence d'un point fixe de l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : C^0([t_0,t_0+T]) & \longrightarrow & C^0([t_0,t_0+T]) \\ v & \longmapsto & \Phi(v) : [t_0, t_0+T] \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ & & \qquad\qquad t \ \longmapsto (\Phi(v))(t) \end{array}$$

avec

$$(\Phi(v))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} c(v(s),s)\,ds\,.$$

1.4 - L'espace $C^0([t_0, t_0+T])$ est muni de sa norme habituelle (pour laquelle il est complet)

$$\|v\| = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} |v(t)|\,.$$

Montrer que pour tout entier k, la $k$ième itérée de Φ vérifie

$$\forall (v,w) \in \left(C^0([t_0,t_0+T])\right)^2\,,\ \left\|\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right\| \leq \frac{L^k T^k}{k!}\,\|v-w\|\,.$$

1.5 - En déduire qu'il existe un entier K tel que Φ^K admet un unique point fixe ; montrer alors que ce point fixe est aussi unique point fixe de Φ.

Nous avons donc montré l'existence et l'unicité d'une solution classique au problème (2)-(3) sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0+T]$.

1.6 - Montrer que ce résultat d'existence et d'unicité s'étend au cas où l'on intègre l'équation dans le sens rétrograde, c'est-à-dire lorsque l'on cherche la solution sur l'intervalle de temps $[t_0 - T, t_0]$, ce qui permet de définir $X(t;x_0,t_0)$ pour tout couple (t,t_0).

1.7 - Prouver que pour tout triplet (t, t_0, s) et tout x_0,

$$X(s; x_0, t_0) = X(s; X(t; x_0, t_0), t) \tag{5}$$

et en déduire que X vérifie l'équation de transport

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s; x, t) + c(x, t) \cdot \nabla_x X(s; x, t) = 0\,. \tag{6}$$

1.8 - En déduire que si u_0 est une fonction $C^1(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction donnée par (4) est l'unique solution classique de (1) assortie de la condition initiale.

1.9 - Dans cette question, σ désigne une fonction C^1 de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \cdot \nabla u + \sigma(x, t)\, u = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^N\,,\ t > 0$$

assorti de la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

admet comme unique solution classique

$$u(x, t) = u_0(X(0; x, t))\ \exp\left(-\int_0^t \sigma(X(s; x, t), s)\, ds\right). \tag{7}$$

On suppose dans la suite de l'exercice que la fonction c et $div(c)$ sont des fonctions C^1.

1.10 - On définit la matrice jacobienne $M(t)$ par $(M)_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; x_0, t_0)$, où x_j est la j^{eme} coordonnée de x_0. Etablir une équation différentielle satisfaite par la fonction $t \mapsto M(t)$ (on admettra que l'on peut commuter les dérivées croisées de X par rapport à t et à x_j). En déduire que la matrice M est inversible.

1.11 - On définit $J(t; x_0, t_0) = \det(M)$. Etablir l'équation différentielle que vérifie $t \mapsto J(t)$.

1.12 - En déduire que la fonction

$$u(x, t) = u_0(X(0; x, t))\, J(0; x, t)$$

est solution du problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(c(x, t)\, u) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^N\,,\ t > 0$$

assorti de la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x)\,.$$

Exercice 2. Schéma saute-mouton pour l'équation des ondes

On s'intéresse à l'approximation du problème de Cauchy pour l'équation des ondes en domaine borné $x \in [0, L]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \;,\; x \in [0, L] \;,\; t > 0 \,, \tag{8}$$

avec pour données initiales

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x)$$

et les conditions limites

$$u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0 \,.$$

2.1 - Montrer que l'énergie

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2([0,L])} + \frac{1}{2} c^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L^2([0,L])}$$

est conservée au cours du temps (on supposera u suffisamment régulière).

On considère le schéma suivant, sur une grille régulière de pas $\Delta x = \frac{L}{N}$ et Δt

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \;\forall j \in [1, N-1] \,.$$

Les conditions aux limites sont prises en compte simplement par

$$u_0^n = u_N^n = 0 \;\forall n \geq 0 \,.$$

2.2 - Quel est l'ordre de ce schéma ? Etudier sa stabilité par Fourier.

2.3 - Etablir la conservation au cours du temps de la quantité

$$E^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| v^{n+1/2} \right\|_h^2 + \frac{1}{2} c^2 \left(d^{n+1}, d^n \right)_h$$

avec par définition

$$v_j^{n+1/2} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$d_{j+1/2} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \,,$$

$$(a,b)_h = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta x \, a_{j+1/2} b_{j+1/2}$$

et

$$\|v\|_h^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x \, (v_j)^2 \, .$$

2.4 - Sous quelle condition suffisante la quantité $E^{n+1/2}$ est elle positive pour tous ses arguments ? Retrouver ainsi la condition de stabilité.