Séance n^{o}10
Correction

18 Janvier 2005

Exercice 1. Equation de transport scalaire en dimension N

1.1 - Soit $v(t) = u(X(t),t)$. Nous avons

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{dX}{dt}(t) \cdot \nabla u(X(t),t) + \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t)\,.$$

Pour que v' soit identiquement nulle, compte tenu de l'équation vérifiée par u, il suffit d'avoir le résultat demandé dans la question.

1.2 - La caractéristique en question est par définition $X(s;x,t)$ et nous avons, toujours par définition $x = X(t;x,t)$. Puisque u est constante le long de cette caractéristique, nous avons

$$\begin{aligned} u(x,t) = u(X(t;x,t),t) &= u(X(s;x,t),s) \ \ \forall s \\ &= u(X(0;x,t),0) \\ &= u_0(X(0;x,t))\,. \end{aligned}$$

1.3 - Une solution classique de (2)-(3) vérifie, par intégration de (2) entre t_0 et t,

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} c(X(s),s)\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} c(X(s),s)\,ds = \Phi(X)(t)$$

et est donc point fixe de Φ. Inversement, si X est un point fixe de Φ, alors c'est une fonction C^1 car c est continue et par dérivation on obtient (2), et (3) est retrouvé car $X(t_0) = \Phi(X)(t_0) = x_0$.

1.4 - On va montrer par récurrence que

$$\left|\left(\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right)(t)\right| \leq \frac{L^k(t-t_0)^k}{k!} \|v-w\| \quad \forall t \in [t_0, t_0+T]\,,$$

ce qui permettra de conclure. La propriété est vraie pour $k=0$; supposons la vraie jusqu'au rang $k-1$, nous avons alors

$$\left(\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right)(t) = \int_{t_0}^{t} \left[c(\Phi^{k-1}(v)(s), s) - c(\Phi^{k-1}(w)(s), s)\right] \, ds\,.$$

On a donc par hypothèse sur c puis par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \left|\left(\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right)(t)\right| &\leq \int_{t_0}^{t} L \left|\Phi^{k-1}(v)(s) - \Phi^{k-1}(w)(s)\right| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \frac{L^k(s-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} \|v-w\| \, ds\,. \end{aligned}$$

Le calcul de la dernière intégrale prouve le résultat au rang k, ce qui achève la démonstration par récurrence.

1.5 - D'après la question précédente, il existe un rang K pour lequel l'application Φ^K est strictement contractante ; on note pour simplifier $\lambda < 1$ son facteur de contraction. En partant d'un élément X_0 quelconque de $C^0[t_0, t_0+T]$, on définit la suite (X_q) d'éléments de $C^0[t_0, t_0+T]$ par l'égalité $X_{q+1} = \Phi^K(X_q)$. Cette suite est de Cauchy dans $C^0[t_0, t_0+T]$. En effet,

$$\|X_{q+p} - X_q\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|X_{q+i} - X_{q+i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda^{q+i-1} \|X_1 - X_0\| \leq \lambda^q \frac{\|X_1 - X_0\|}{1-\lambda}$$

qui tend vers 0 lorsque q croît. L'espace $C^0[t_0, t_0+T]$ étant complet pour la norme considérée, la suite (X_q) tend vers une limite notée X appartenant à $C^0[t_0, t_0+T]$. L'application Φ^K étant continue, et par définition de (X_q), on a alors

$$\Phi^K(X) = X\,,$$

ce qui prouve l'existence d'un point fixe de Φ^K. L'unicité de ce point fixe s'obtient en considérant deux points fixes X et Y. L'application Φ^K étant strictement contractante, on a alors

$$\|X-Y\| = \left\|\Phi^K(X) - \Phi^K(Y)\right\| \leq \lambda \|X-Y\| \ \ (\lambda < 1)\,,$$

ce qui n'est possible que si $X = Y$.

On montre alors que $\Phi(X)$ est aussi point fixe de Φ^K en calculant

$$\Phi^K(\Phi(X)) = \Phi(\Phi^K(X)) = \Phi(X)\,.$$

Par unicité du point fixe de Φ^K, on déduit que ses deux points fixes X et $\Phi(X)$ sont égaux et que X est donc point fixe de Φ. Ce point fixe est unique car si Y est point fixe de Φ, alors c'est aussi un point fixe de Φ^K qui n'en possède qu'un.

1.6 - On peut tenir un raisonnement similaire à celui des questions précédentes en travaillant sur $C^0[t_0 - T, t_0]$. On obtient alors l'existence et l'unicité de la solution classique à (2)-(3) sur l'intervalle de temps $[t_0 - T, t_0]$. Le raccord entre la solution sur cet intervalle de temps et la solution sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ est bien C^1 en considérant d'une part (3) pris au temps t_0 et ensuite (2) au temps t_0, la fonction c étant continue.

1.7 - Les deux membres de gauche de l'équation (5) vérifient la même équation différentielle (2) en la variable s. Ils vérifient en outre la même condition initiale (3) en $s = t$: par définition, on a

$$X(t; X(t; x_0, t_0), t) = X(t; x_0, t_0)\,.$$

Par unicité de la soltion à (2)-(3), on en déduit l'égalité (5) pour tout s.

On dérive ensuite l'égalité (5) par rapport à t. Cela donne

$$0 = \frac{\partial X}{\partial t}(s; X(t; x_0, t_0), t) + \frac{d}{dt}X(t; x_0, t_0) \cdot \nabla_x X(s; X(t; x_0, t_0), t)\,,$$

soit

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s; X(t; x_0, t_0), t) + c(X(t; x_0, t_0), t) \cdot \nabla_x X(s; X(t; x_0, t_0), t) = 0\,.$$

Le résultat est obtenu en appliquant cette relation en prenant $x_0 = x$ et $t_0 = t$; on a alors $X(t; x_0, t_0) = X(t; x, t) = x$.

1.8 - Si u_0 est C^1, alors l'application $(x, t) \longmapsto u_0(X(0; x, t))$ est elle-même C^1 sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ et le théorème de dérivation des applications composées et l'égalité (6) montrent que cette application est solution de l'équation de transport ; d'autre part elle vérifie bien la condition initiale. Inversement pour montrer que cette solution est bien la seule, on commence par montrer que toute solution classique $u(x, t)$ est constante le long des caractéristiques

$$\frac{d}{dt}u(X(t; x_0, t_0), t) = 0$$

grâce à l'équation vérifiée par X. Nous avons donc pour tout (y, t)

$$u(X(t; y, 0), t) = u(X(0; y, 0), 0) = u(y, 0) = u_0(y)\,. \qquad (*)$$

On applique ensuite (5) pour $t = 0$ puis $s = t_0 = t$ et $x_0 = x$, ce qui donne

$$X(t; x, t) = X(t; X(0; x, t), 0)\,.$$

Mais $X(t; x, t)$ vaut aussi bien sûr x. En choisissant $y = X(0; x, t)$ dans $(*)$, on aboutit à

$$u(x, t) = u_0(X(0; x, t))\,.$$

1.9 - Si u est solution classique du nouveau problème, alors la fonction F définie par

$$F(x,t) = \exp\left(\int_0^t \sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right) u(x,t)$$

est solution classique de (1), et réciproquement. En effet

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \exp\left(\int_0^t \sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \sigma(X(t;x,t),t)u(x,t) + \int_0^t \frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t)\cdot\nabla\sigma(X(s;x,t),s)\,ds\ u(x,t)\right)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t) &= \exp\left(\int_0^t \sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right)\\ &\quad\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \int_0^t \frac{\partial X}{\partial x_i}(s;x,t)\cdot\nabla\sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right).\end{aligned}$$

De plus, $\sigma(X(t;x,t),t) = \sigma(x,t)$; d'où

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\cdot\nabla F(x,t) = \exp\left(\int_0^t \sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right)$$
$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\cdot\nabla u(x,t) + \sigma(x,t)\,u(x,t)\right)\right.$$
$$\left.+u(x,t)\left(\int_0^t \left(\frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\cdot\nabla_x X(s;x,t)\right)\cdot\nabla\sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right)\right].$$

Le terme de la deuxième ligne est nul par hypothèse sur u et celui de la troisième ligne grâce à l'équation vérifiée par X. D'après les résultats précédents, il existe une unique fonction F solution classique du problème initial et on a

$$F(x,t) = F(X(0;x,t),0) = u_0(X(0;x,t)).$$

Nous avons donc

$$u(x,t) = u_0(X(0;x,t)\exp\left(-\int_0^t \sigma(X(s;x,t),s)\,ds\right).$$

1.10 - On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(M)_{ij}(t) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial t}(t;x_0,t_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}c_i(X(t;x_0,t_0),t)\\ &= \sum_k \frac{\partial c_i}{\partial x_k}(X(t;x_0,t_0),t)\frac{\partial X_k}{\partial x_j}(t;x_0,t_0).\end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité est le terme ij du produit matriciel $\nabla c\, M$. On a donc

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t) = \nabla c(X(t; x_0, t_0), t)\, M(t)$$

et la condition $M(t_0) = Id$ car alors $X(t; x_0, t_0) = x_0$. La matrice M est alors inversible car elle s'écrit

$$M(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \nabla c(X(s; x_0, t_0), s)\, ds\right) .$$

1.11 - On a

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{ij} \frac{\partial (det\,(M))}{\partial M_{ij}} \frac{\partial}{\partial t}(M)_{ij} = \sum_{ijk} \frac{\partial (det\,(M))}{\partial M_{ij}} M_{kj} \frac{\partial c_i}{\partial x_k}.$$

Or en développant le déterminant de M par rapport à sa i^{eme} ligne, on a

$$det(M) = \sum_j M_{ij}\, co(M)_{ij}\, ,$$

où $co(M)_{ij}$ est le cofacteur ij de M (c'est-à-dire $(-1)^{ij} det(\tilde{M_{ij}})$, avec $(\tilde{M_{ij}})$ la matrice M à laquelle on a enlevé la i^{eme} ligne et la j^{eme} colone. Comme chaque terme M_{ij} n'aparait qu'une seule fois dans la formule ci-dessus, on a

$$\frac{\partial (det\,(M))}{\partial M_{ij}} = co(M)_{ij}\, .$$

Finalement,

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{ik} \sum_j M_{kj} (co(M))^T_{ji} \frac{\partial c_i}{\partial x_k} = \sum_{ik} (M\, co(M)^T)_{ki} \frac{\partial c_i}{\partial x_k}.$$

On se souvient alors de la formule

$$(M\, co(M)^T) = det(M)\, Id = J\, Id$$

et l'on trouve donc

$$\frac{dJ}{dt} = J \sum_{ik} \delta_{ik} \frac{\partial c_i}{\partial x_k}.$$

Soit

$$\frac{dJ}{dt}(t) = J(t)\, div\, c\,(X(t; x_0, t_0), t)\, .$$

1.12 - D'après la question précédente, on a

$$J(t;x_0,t_0) = J(t_0;x_0,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} div\, c\,(X(s;x_0,t_0),s)\,ds\right).$$

Mais $J(t_0;x_0,t_0) = 1$ donc

$$J(t;x_0,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} div\, c\,(X(s;x_0,t_0),s)\,ds\right).$$

Ceci implique en particulier

$$J(0;x,t) = \exp\left(\int_{t}^{0} div\, c\,(X(s;x,t),s)\,ds\right)$$

Le problème à résoudre s'écrit aussi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\cdot\nabla u + div\, c\, u = 0\,,$$

dont l'unique solution classique est donnée, d'après les questions précédentes par

$$u(x,t) = u_0(X(0;x,t))\,\exp\left(-\int_0^t div\, c\,(X(s;x,t),s)\,ds\right) = u_0(X(0;x,t))\,J(0;x,t)\,.$$

Exercice 2. Schéma saute-mouton pour l'équation des ondes

2.1 - Il suffit de prendre le produit scalaire $L^2([0,L])$ de l'équation des ondes par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et d'écrire d'une part

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 (x)\,dx$$

et d'autre part, après avoir effecté une intégration par partie (les termes de bord étant nuls grâce aux conditions limites)

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\,(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 (x)\,dx\,.$$

2.2 - Le schéma est d'ordre deux (différences centrées) ; on peut le vérifier par développements limités. Sa stabilité s'étudie par Fourier en supposant

$$u_j^{n-1} = \exp(i\xi j\Delta x)$$

et en cherchant l'équation vérifiée par g défini par $u^{n+1} = gu^n = g^2u^{n-1}$. On pose $\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$g^2 - 2g + 1 - \lambda^2 g\left(\exp(i\xi\Delta x) - 2 + \exp(-i\xi\Delta x)\right) = 0$$

soit

$$g^2 - 2g\left[1 - 2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right] + 1 = 0\,.$$

Le discriminant réduit de cette équation vaut

$$\Delta = \left[1 - 2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right]^2 - 1\,.$$

Si $\lambda \leq 1$ alors pour tout ξ,

$$-1 \leq 1 - 2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \leq 1$$

et Δ est donc négatif ou nul. Le polynôme en g étant à coefficients réels, ses racines sont alors complexes conjuguées et leur produit vaut -1. Elles sont donc toutes les deux de module unité, et le schéma est donc stable (l'erreur d'amplitude est même nulle : le schéma n'est pas dissipatif).
Si $\lambda > 1$, pour certaines valeurs de ξ, Δ est strictement positif ; ses racines sont toutes les deux réelles et disctintes ; comme leur produit vaut -1, l'une des deux est de valeur absolue strictement supérieure à 1 ; le schéma est donc instable.

2.3 - Avec les nouvelles notations, le schéma s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}}{\Delta t} - \frac{1}{2}c^2\frac{d_{j+1/2}^n - d_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0\,.$$

De façon analogue à la méthode utilisé dans le cas continu, nous multiplions cette égalité par $\Delta x\,\frac{v_j^{n+1/2}+v_j^{n-1/2}}{\Delta t} = \Delta x\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{\Delta t}$ et nous sommons sur $j \in [1, N-1]$. L'égalité demandée est obtenue en remarquant que l'on peut effectuer une "intégration par partie discrète" (dans laquelle les termes de bord sont nuls grâce aux conditions limites) :

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left(d_{j+1/2}^n - d_{j-1/2}^n\right)\, u_j^{n+1} = \sum_{j=0}^{N-1} d_{j+1/2}^n(u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}) = -(d^n, d^{n+1})_h$$

2.4 - On reformule $E^{n+1/2}$

$$E^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left\|v^{n+1/2}\right\|_h^2 + \frac{1}{2}c^2\left(d^n, d^n\right)_h + \frac{1}{2}c^2\left(d^{n+1} - d^n, d^n\right)_h$$

Or d'après a définition de v et d, on a

$$(d^{n+1} - d^n)_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2})\,.$$

On peut donc, par Cauchy-Schwartz discret, minorer $E^{n+1/2}$ de la façon suivante

$$E^{n+1/2} \geq \frac{1}{2} \left\| v^{n+1/2} \right\|_h^2 + \frac{1}{2} c^2 \left(d^n, d^n \right)_h - c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\| v^{n+1/2} \right\|_h \left(d^n, d^n \right)_h^{1/2} .$$

En posant $V = \left\| v^{n+1/2} \right\|_h$ et $D = \left(d^n, d^n \right)_h^{1/2}$, on doit voir sous quelle condition la quantité

$$V^2 - 2c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V D + c^2 D^2$$

est toujours strictement positive. C'est le cas si le discriminant réduit est négatif, soit

$$\Delta = c^2 \left(c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1 \right) < 0$$

c'est-à-dire sous la condition de stabilité trouvée précédemment. On en conclut que sous cette contrainte, $E^{n+1/2}$ est une norme et, étant conservée au cours des itérations, cela signifie que V et D sont elles-mêmes bornées, d'où la stabilité.