

# Résolution analytique d'équations hyperboliques non linéaires en 1D

Corrigé de la séance 11

25 Janvier 2005

## Exercice 1. Solution classique

La condition initiale  $u_0(x) = x$  est croissante et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . La méthode des caractéristiques permet de construire une solution classique du problème de Cauchy pour tout  $t > 0$ .

**1.1** - Pour Burgers  $a(u) = u$ .

Les droites caractéristiques sont d'équations

$$x_\xi(t) = a(u_0(\xi))t + \xi = \xi t + \xi.$$

La solution  $u$  est constante le long des caractéristiques,

$$u(x_\xi(t), t) = u_0(\xi) = \xi.$$

Soit  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ . Il existe une unique caractéristique passant par  $(x, t)$ . Le pied de cette caractéristique est  $\xi = \frac{x}{1+t}$ . Finalement (cf. figure 1),

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}.$$

## Exercice 2. Construction de l'onde de détente

La condition initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x/\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et continue. La méthode des caractéristiques permet de construire une fonction  $u$  continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux vérifiant l'équation de Burgers point par point dans tout ouvert où elle est  $\mathcal{C}^1$ . C'est une solution faible du problème.

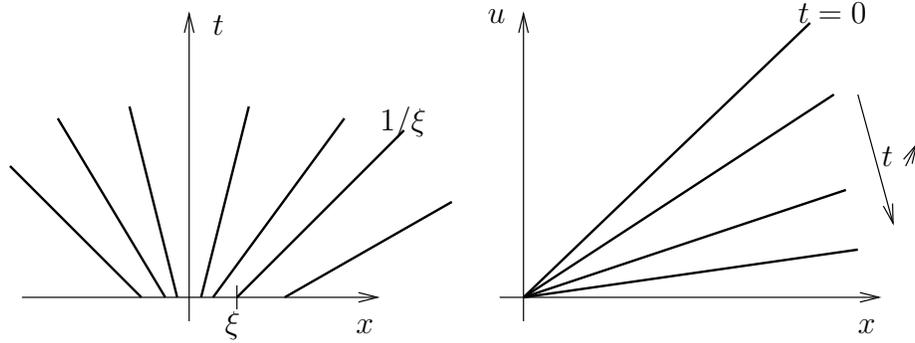


FIG. 1 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

2.1 - La droite caractéristique issue de  $\xi$  a pour équation (cf. figure 2 à gauche)

$$\begin{cases} x = \xi & \text{si } \xi \leq 0 & \text{soit } x \leq 0 \\ x = \xi + \frac{\xi}{\alpha}t & \text{si } 0 \leq \xi \leq \alpha & \text{soit } 0 \leq x \leq t + \alpha \\ x = \xi + t & \text{si } \xi \geq \alpha & \text{soit } x \geq t + \alpha \end{cases}$$

La solution  $u$  est constante le long des caractéristiques

$$u(x_\xi, t) = u_0(\xi),$$

soit (cf. figure 2 à droite)

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha+t} & \text{si } 0 \leq x \leq t + \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq t + \alpha \end{cases}$$

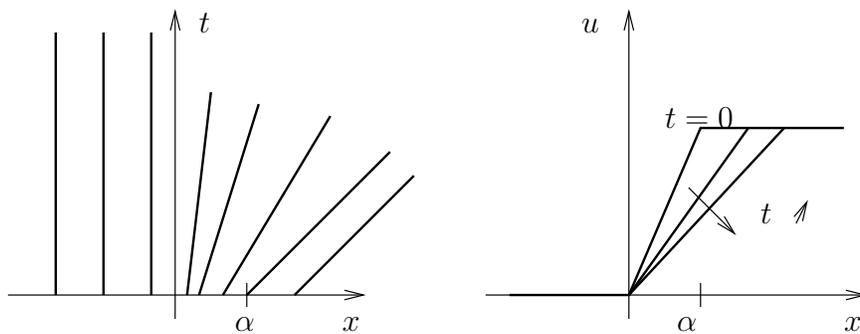


FIG. 2 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

**2.2** - La solution n'est pas une solution classique puisqu'elle n'est pas  $\mathcal{C}^1$ .

**2.3** - Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , la condition initiale tend vers un échelon (fonction discontinue). Pour résoudre le problème il faut rajouter des "caractéristiques virtuelles" d'équation  $\frac{x}{t}$ . La solution obtenue est continue pour  $t > 0$  (cf. Problème de Riemann à 2 états).

## Exercice 3. Problème de Riemann à 2 et 3 états

### 3.1 - Problème de Riemann à 2 états

- $u_g < u_d$ . La condition initiale est croissante mais n'est pas continue.
  - La première solution qui vient à l'esprit est la solution entropique (détente). Les droites caractéristiques ont pour équation

$$\begin{cases} x = u_g t + \xi & \text{si } \xi < 0 & \text{soit } \frac{x}{t} \leq u_g & \text{zone 1} \\ x = u_d t + \xi & \text{si } \xi > 0 & \text{soit } \frac{x}{t} > u_d & \text{zone 2} \end{cases}$$

On introduit des caractéristiques "pour combler l'espace entre les zones 1 et 2. Ces caractéristiques virtuelles ont pour équation  $\frac{x}{t} = c$  pour  $u_g \leq c \leq u_d$  (cf. figure 3 à gauche).

La solution est donnée par (cf. figure 3 à droite)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq u_g t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_g t < x \leq u_d t \\ u_d & \text{si } x > u_d t \end{cases}$$

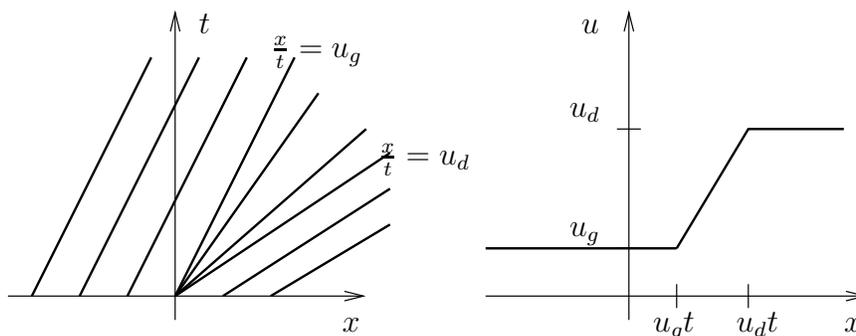


FIG. 3 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour  $t > 0$  (à droite).

- Une autre solution est d’introduire un choc dans la zone où il n’y a pas de caractéristiques “naturelles”. La ligne de choc vérifie Rankine-Hugoniot (RH), soit dans notre cas  $\sigma'(t) = \frac{1}{2}(u_g + u_d)$ . On obtient, en intégrant,  $\sigma(t) = \frac{1}{2}(u_g + u_d)t$  puisque la ligne de choc passe par le point  $(0, 0)$  (cf. figure 4 à gauche). La solution obtenue vaut alors (cf. figure 4 à droite)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{1}{2}(u_g + u_d)t \\ u_d & \text{si } x > \frac{1}{2}(u_g + u_d)t \end{cases} .$$

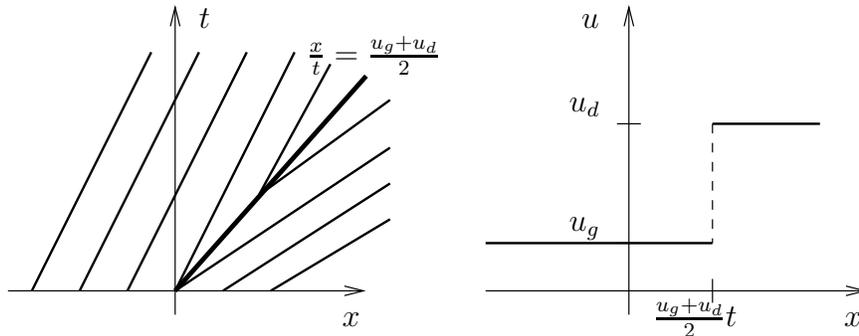


FIG. 4 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour un temps  $t > 0$  (à droite).

- Remarquons que la solution n’est pas entropique puisque  $u^- = u_g < u_d = u^+$ .
- On pourrait introduire plusieurs lignes de choc ....
2.  $u_g = u_d$ .
    - La solution classique est  $u(x, t) = u_d = u_g$ .
    - On peut construire d’autres solutions en introduisant des chocs. Par contre pour pouvoir appliquer RH, il faut rajouter un nombre impaire  $\geq 3$  de lignes de choc. En effet, si l’on met une ligne de choc, ça n’a pas d’intérêt puisque la solution vaut  $u_g = u_d$  de part et d’autre du choc ! Si l’on considère 2 lignes de choc, la solution vaut  $u_g$  à gauche,  $u_1$  entre les deux zones et  $u_g$  à droite. Les équations des deux lignes de choc sont toutes les 2  $\sigma(t) = \frac{1}{2}(u_g + u_1)t$ ; par conséquent la zone entre les deux chocs n’existe pas. La solution est  $u(x, t) = u_g$ . Considérons donc 3 lignes de chocs  $l_1, l_2, l_3$ . La solution vaut  $u_g$  à gauche,  $u_1$  entre  $l_1$  et  $l_2$ ,  $u_2$  entre  $l_2$  et  $l_3$  et  $u_g$  à droite. RH nous impose que  $l_1$  est d’équation  $\sigma(t) = \frac{1}{2}(u_g + u_1)t$ ,  $l_2$  est d’équation  $\sigma(t) = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)t$  et  $l_3$  est d’équation  $\sigma(t) = \frac{1}{2}(u_g + u_2)t$  (cf. figure 5 à gauche). L’ordre des zones impose  $u_g < u_2$  et  $u_1 < u_g$ . Il suffit alors de choisir  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant les deux conditions (cf. figure 5 à droite) !
  3.  $u_g > u_d$ .
    - Les droites caractéristiques se coupent pour  $t > t^* = 0$ . On introduit une ligne de choc vérifiant RH d’équation  $\sigma(t) = \frac{1}{2}(u_g + u_d)t$  (cf. figure 6 à gauche). A gauche

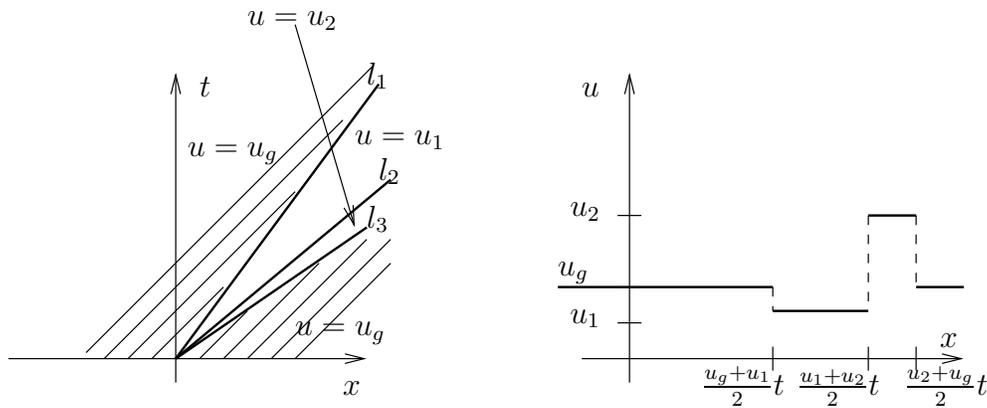


FIG. 5 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour un temps  $t > 0$  (à droite).

de la ligne de choc la solution vaut  $u_g$  et à droite elle vaut  $u_d$  (cf. figure 6 à droite).

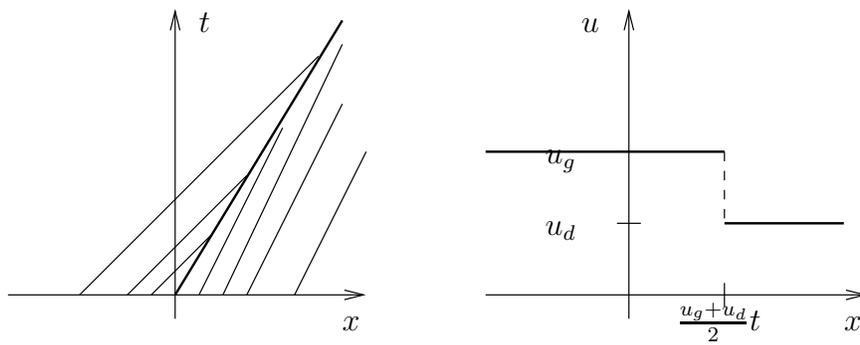


FIG. 6 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour un temps  $t > 0$  (à droite).

– On peut rajouter d’autres lignes de choc ....

### 3.2 - Problème de Riemann à 3 états

**3.2-(a)** Pour une condition initiale croissante, ie  $u_1 \leq u_2 \leq u_3$  on peut appliquer la méthode des caractéristiques et il existe une unique solution  $\mathcal{C}^0$ .

**3.2-(b)** La condition initiale vérifie  $u_1 = 0, u_2 = 1$  et  $u_3 = 0$ , elle n’est pas croissante. Il y a trois zones à distinguer pour les caractéristiques suivant la valeur de  $\xi$  : zone 1 pour

$\xi \leq 0$ , zone 2 pour  $0 < \xi \leq 1$  et zone 3 pour  $\xi > 1$ ,

$$\begin{cases} x = \xi & \text{si } \xi < 0 & \text{soit } x \leq 0 & \text{zone1} \\ x = \xi + t & \text{si } 0 < \xi < 1 & \text{soit } t < x \leq t + 1 & \text{zone2} \\ x = \xi & \text{si } \xi > 1 & \text{soit } x > 1 & \text{zone3} \end{cases}$$

Les caractéristiques des zones 2 et 3 se croisent pour  $t > t^* = 0$ , il y a naissance d'un choc. L'équation de la ligne de choc est  $\sigma(t) = \frac{1}{2}t + 1$ .

Il existe une zone, notée 1-2, entre les zones 1 et 2 et qui n'est pas couverte par les caractéristiques. On introduit donc les caractéristiques d'équation  $\frac{x}{t} = c$  pour  $0 < c \leq 1$  pour la zone 1-2.

La droite de discontinuité d'équation  $\sigma(t) = \frac{1}{2}t + 1$  intercepte la zone 1-2 pour  $t \geq t^{**}$ , où  $t^{**}$  est donné par

$$\frac{1}{2}t^{**} + 1 = t^{**}$$

ie  $t^{**} = 2$ . La ligne de choc entre les zones 1-2 et 3 démarrante au point  $(x^{**} = 2, t^{**} = 2)$  est construite par RH

$$\begin{aligned} \sigma'(t)[u] &= [f(u)] \\ \sigma'(t) \left( 0 - \frac{\sigma(t)}{t} \right) &= \frac{1}{2} \left( 0^2 - \frac{\sigma(t)^2}{t^2} \right) \\ \sigma'(t) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma(t)}{t} \\ \sigma(t) &= \sqrt{2t}. \end{aligned}$$

Pour  $t > t^{**}$ , il y a trois zones : 1,1-2 et 3; la zone 2 a disparu. Les caractéristiques sont données figure 7.

La solution est (cf. figure 8) :

– pour  $t < t^{**} = 2$ ,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x < t \\ 1 & \text{si } t \leq x < \frac{1}{2}t + 1 \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 1 \end{cases}$$

Il y a une ligne de choc entre les zones 2 et 3. L'amplitude du choc vaut  $\Delta u = -1$  et le choc se déplace à la vitesse  $\frac{1}{2}$ .

– pour  $t > t^{**} = 2$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x < \sqrt{2t} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{2t} \end{cases}$$

Il y a une ligne de choc entre les zones 1-2 et 3. L'amplitude du choc vaut  $\Delta u = -\sqrt{\frac{2}{t}}$

et le choc se déplace à la vitesse  $\sqrt{\frac{1}{2t}}$ .

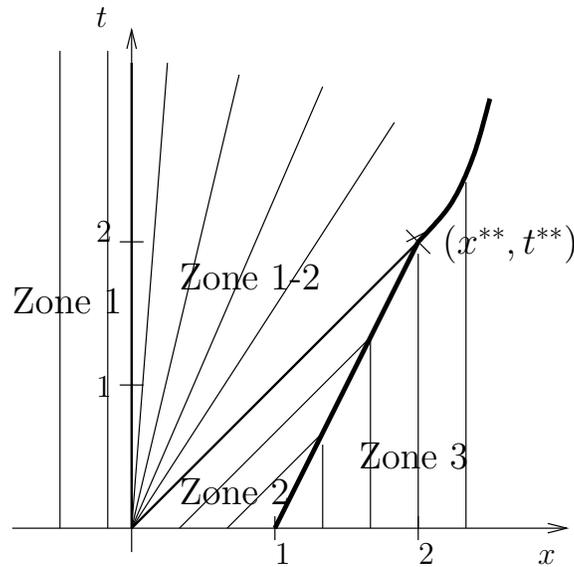


FIG. 7 – Droites caractéristiques et lignes de choc

Par conséquent, pour  $t$  tendant vers l'infini, l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers 0.

**3.2-(c)** La condition initiale vérifie  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 0$ , elle est décroissante. Il y a trois zones à distinguer pour les caractéristiques suivant la valeur de  $\xi$  : zone 1 pour  $\xi \leq 0$ , zone 2 pour  $0 < \xi \leq 1$  et zone 3 pour  $\xi > 1$ ,

$$\begin{cases} x = \xi + 2t & \text{si } \xi \leq 0 \text{ soit } & x \leq 2t & \text{zone 1} \\ x = \xi + t & \text{si } 0 < \xi \leq 1 \text{ soit } & t < x \leq t + 1 & \text{zone 2} \\ x = \xi & \text{si } \xi > 1 & \text{soit } & x > 1 \text{ zone 3} \end{cases} .$$

Les caractéristiques des zones 1 et 2 se croisent pour  $t > t^* = 0$ , il y a naissance d'un choc. L'équation de la ligne de choc entre les zones 1 et 2 est  $\sigma(t) = \frac{3}{2}t$ .

Les caractéristiques des zones 2 et 3 se croisent pour  $t > t^* = 0$ , il y a naissance d'un choc. L'équation de la ligne de choc est  $\sigma(t) = \frac{1}{2}t + 1$ .

Comme le choc entre les zones 2 et 3 se déplace plus vite que celui entre les zones 1 et 2, les deux lignes de choc vont se croiser pour  $t = t^{**}$  avec  $\frac{3}{2}t^{**} = \frac{1}{2}t^{**} + 1$ , soit  $t^{**} = 1$  et  $x^{**} = 3/2$ . Pour  $t > t^{**}$ , il n'y a plus que 2 zones : zone 1 et zone 3. La ligne de choc séparant les zones 1 et 3 commence au point  $(x^{**} = 3/2, t^{**} = 1)$  et a pour équation  $\sigma(t) = t + \frac{1}{2}$ . Les caractéristiques sont données figure 9.

La solution est (cf. figure 10) :

– pour  $t < t^{**} = 1$ ,

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < \frac{3}{2}t \\ 1 & \text{si } \frac{3}{2}t < x < \frac{1}{2}t + 1 \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 1 \end{cases}$$

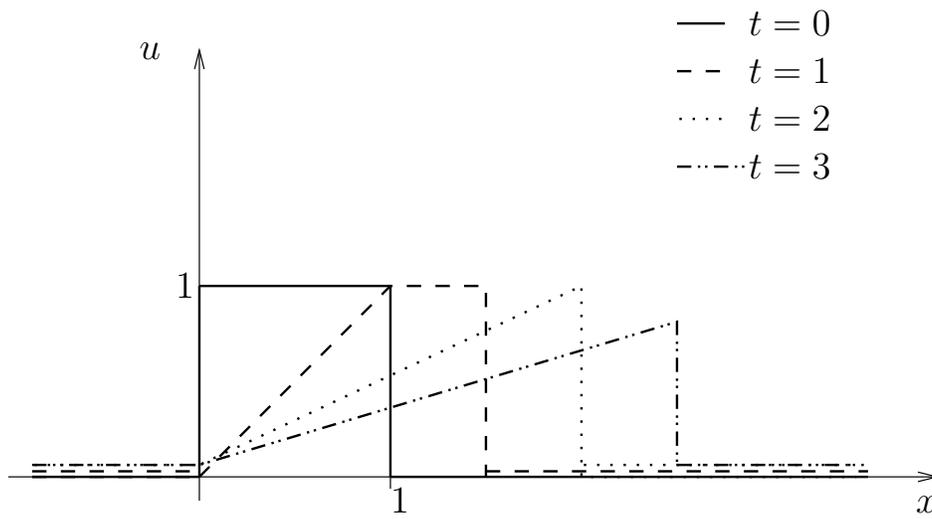


FIG. 8 – Solution pour différents temps

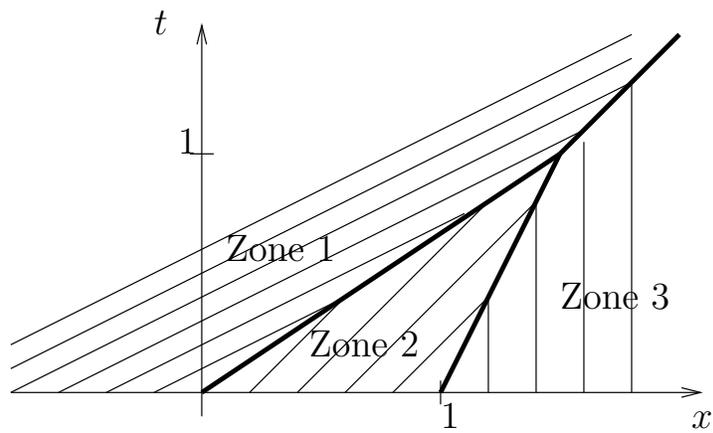


FIG. 9 – Droites caractéristiques et lignes de choc

– pour  $t > t^{**} = 1$

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < t + 1/2 \\ 0 & \text{si } x > t + 1/2 \end{cases}$$

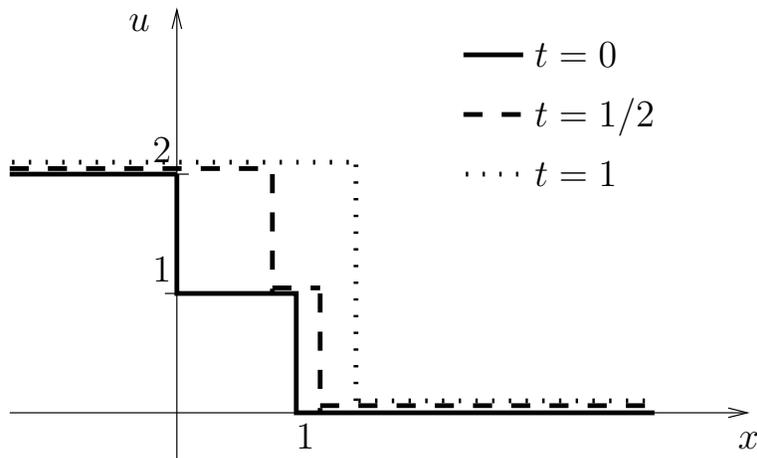


FIG. 10 – Solution pour différents temps

## Exercice 4. Equation de Burgers avec terme d'ordre 0

4.1 - On considère les courbes caractéristiques d'équation  $\begin{cases} \frac{dx_\xi}{dt} = u(x_\xi(t), t) \\ x_\xi(0) = \xi \end{cases}$ .

Le long de ces courbes,  $u$  décroît de manière exponentielle. En effet,

$$\frac{d}{dt}u(x_\xi(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_\xi(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}u(x_\xi(t), t)\frac{dx_\xi}{dt}(t) = -\beta u(x_\xi(t), t).$$

Par conséquent

$$u(x_\xi(t), t) = u(x_\xi(0), 0) \exp(-\beta t) = u_0(\xi) \exp(-\beta t).$$

En utilisant l'expression de  $u$ , on peut déterminer les caractéristiques

$$\frac{dx_\xi}{dt} = u(x_\xi(t), t) = u_0(\xi) \exp(-\beta t),$$

avec  $x_\xi(0) = \xi$ . En intégrant par rapport au temps, on obtient

$$x_\xi(t) = u_0(\xi) \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi.$$

Les caractéristiques sont des courbes exponentielles. Quand  $\beta$  tend vers 0 on retrouve les droites caractéristiques de Bürgers d'équation  $x_\xi(t) = u_0(\xi)t + \xi$ .

Soit  $(x, t)$  un point du plan. Pour  $u_0$  continue et croissante, il existe une et une seule caractéristique passant par  $(x, t)$ . En effet, considérons la fonction  $g$  définie par

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi \longmapsto u_0(\xi) \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi - x \quad .$$

$g$  est une fonction strictement croissante et  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g(\xi) = -\infty$  et  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi) = +\infty$ . Par conséquent  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour ce couple  $(x, t)$ , il existe donc un unique  $\xi = g^{-1}(0)$  et  $u(x, t) = u_0(\xi) \exp(-\beta t)$ .

**4.2** - La condition initiale  $u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0 \\ u_g + \frac{u_d - u_g}{\alpha} x & \text{si } 0 < x \leq \alpha \\ u_d & \text{si } x > \alpha \end{cases}$ , est continue et croissante.

On peut appliquer directement les résultats établis à la question précédente. La courbe caractéristique issue de  $\xi$  a pour équation (cf. figure 11 en haut)

$$\begin{cases} x = u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi & \text{si } \xi \leq 0 & \text{soit } x \leq u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \\ x = \left(u_g + \frac{u_d - u_g}{\alpha} \xi\right) \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi & \text{si } 0 < \xi \leq \alpha & \text{soit } u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} < x \leq u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \alpha \\ x = u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi & \text{si } \xi \geq \alpha & \text{soit } x > u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \alpha \end{cases} .$$

La solution  $u(x, t)$  vaut alors (cf. figure 11 en bas)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g \exp(-\beta t) & \text{si } x \leq u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \\ \frac{\beta x}{1 - \exp(-\beta t)} \exp(-\beta t) & \text{si } u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} < x \leq u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \alpha \\ u_d \exp(-\beta t) & \text{si } x > u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \alpha \end{cases} .$$

**4.3** - La condition initiale  $u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$ , (avec  $u_d \geq u_g$ ), est croissante mais n'est plus continue. Les caractéristiques construites à la question 1 sont

$$\begin{cases} x = u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi & \text{si } \xi \leq 0 & \text{soit } x \leq u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \\ x = u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} + \xi & \text{si } \xi > \alpha & \text{soit } x < u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \end{cases}$$

Il y a une zone du plan qui n'est pas balayée par des caractéristiques. Pour pallier à ce problème, on rajoute des caractéristiques "virtuelles" d'équations

$$\frac{\beta x}{1 - \exp(-\beta t)} = cste ,$$

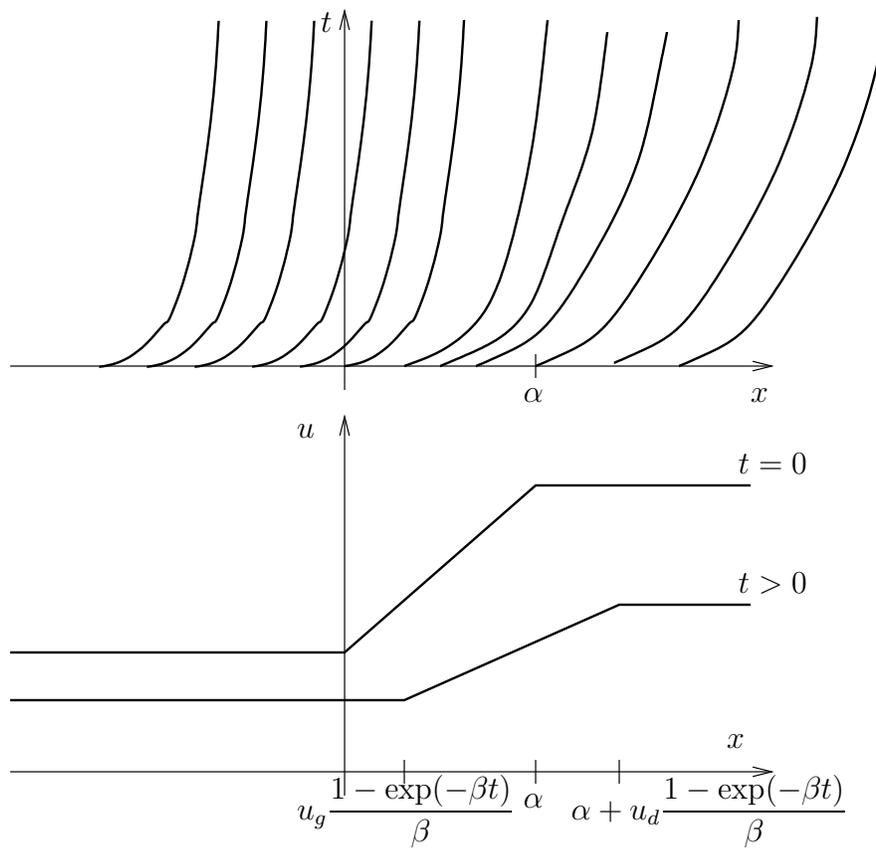


FIG. 11 – Courbes caractéristiques (en haut) et allure de la solution pour  $t = 0$  et  $t > 0$  (en bas)

pour  $cste$  comprise entre  $u_g$  et  $u_d$  (cf. figure 12 en haut). Le long de ces courbes,  $u$  décroît exponentiellement, ie  $\frac{\beta x}{1 - \exp(-\beta t)} \exp(-\beta t)$  est solution. Finalement, la solution  $u(x, t)$  est donnée par (cf. figure 12 en bas)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g \exp(-\beta t) & \text{si } x < u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \\ \frac{\beta x}{1 - \exp(-\beta t)} \exp(-\beta t) & \text{si } u_g \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \leq x < u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \\ u_d \exp(-\beta t) & \text{si } x \geq u_d \frac{1 - \exp(-\beta t)}{\beta} \end{cases}$$

ce qui correspond à la limite quand  $\alpha$  tend vers 0 de la solution de la question précédente.

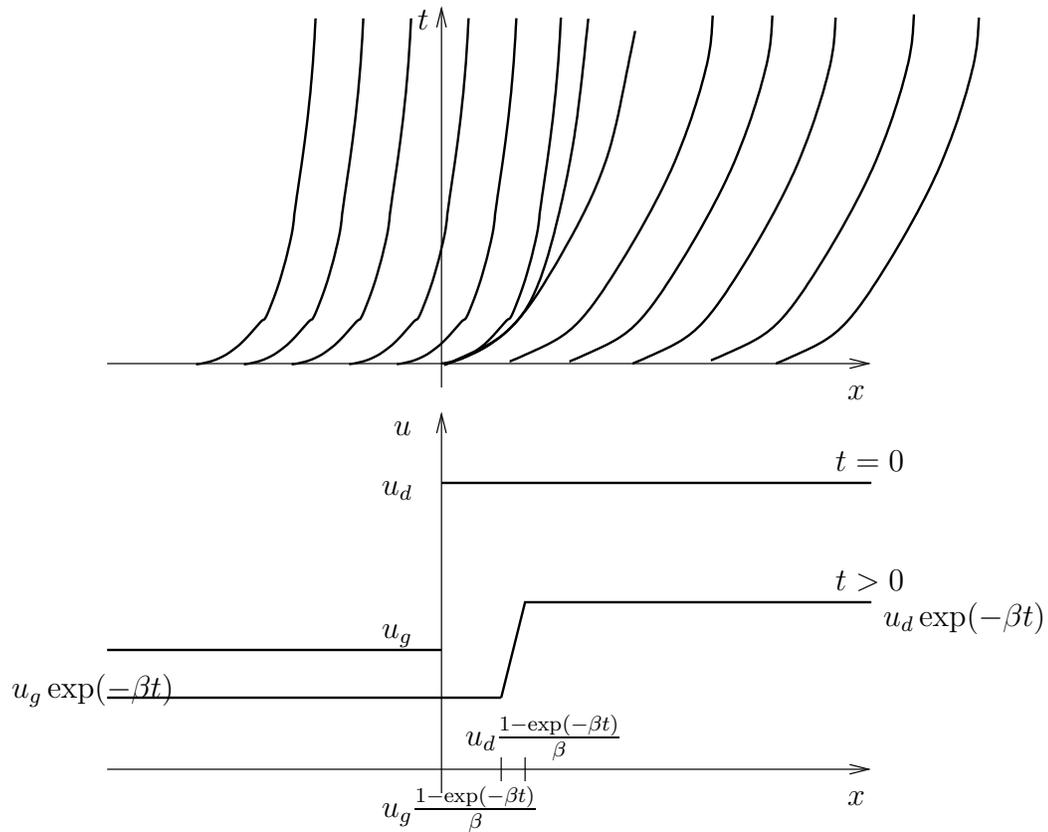


FIG. 12 – Courbes caractéristiques (en haut) et allure de la solution pour  $t = 0$  et  $t > 0$  (en bas)