

Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires

Corrigé de la Séance 12

1 Février 2005

Exercice 1. Un exemple de schéma non conservatif

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \frac{u_j^n \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } u_j^n \geq 0 \\ u_j^n - \frac{u_j^n \Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } u_j^n \leq 0 \end{cases}$$

pour approcher l'équation de Burgers.

1.1 - Considérons l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

et les deux schémas explicites décentrés en espace suivant :

– schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0;$$

– schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0.$$

Pour $a \geq 0$, le schéma décentré à gauche est stable sous la CFL $a \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 1$ et le schéma décentré à droite est instable. Pour $a \leq 0$, le schéma décentré à gauche est instable et le schéma décentré à droite est stable sous la CFL $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 1$.

Par conséquent, pour $a \geq 0$, on choisit le schéma décentré à gauche et pour $a \leq 0$ on choisit le schéma décentré à droite.

En écrivant l'équation de Burgers sous forme non conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

avec $a(u) = u$, on obtient une équation de type transport avec une vitesse non constante. On généralise le résultat obtenu avec l'équation de transport en prenant comme critère le signe de $(a(u))_j^n = u_j^n$.

1.2 - Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction g régulière telle que le schéma se mette sous la forme conservative. La fonction g vérifie donc

$$(1) \quad g(v, w) - g(u, v) = \begin{cases} v(v - u) & \text{si } v \geq 0 \\ v(w - v) & \text{si } v \leq 0 \end{cases}.$$

Comme g est supposée régulière, la fonction $(u, v, w) \rightarrow g(v, w) - g(u, v)$ l'est aussi. Or ce n'est pas le cas étant donné (1).

1.3 - On considère la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On peut construire la solution faible entropique exacte en utilisant la méthode des caractéristiques (problème de Riemann à 2 états). La condition de RH nous donne l'équation de la ligne de choc $\sigma(t) = \frac{1}{2}t$. La solution est

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Appliquons à présent le schéma à cette condition initiale (notons qu'on n'a pas besoin de la discrétiser). On trouve $u_j^n = u_j^0$ pour tout j . On a donc une ligne de choc d'équation $\sigma(t) = 0$. $\{u_j^n\}_j$ n'est pas une solution faible car elle ne vérifie pas RH au niveau du choc.

Exercice 2. Le schéma d'Engquist-Osher

2.1 - Le schéma peut s'écrire

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_j^{n+1}) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$

avec

$$g(u_j^n, u_j^{n+1}) = \frac{1}{4}((u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2) - \frac{1}{2} \int_{u_j^n}^{u_j^{n+1}} |\xi| d\xi.$$

Le flux numérique g vaut donc

$$g(u, v) = -\frac{1}{2} \int_u^v |\xi| d\xi + \frac{1}{4}(u^2 + v^2).$$

2.2 - On a

$$g(u, u) = \frac{1}{2}u^2 = f(u).$$

Le schéma est donc consistant avec l'équation de Burgers.

2.3 - On écrit le schéma sous la forme

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n),$$

avec

$$H(u, v, w) = v - \frac{\alpha}{4}(w^2 - u^2) + \frac{\alpha}{2} \left(\int_v^w |\xi| d\xi - \int_u^v |\xi| d\xi \right)$$

et montrons que H est croissante par rapport à chacune de ses variables.

$$(2) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\alpha}{2}u + \frac{\alpha}{2}|u|$$

$$(3) \quad \frac{\partial H}{\partial v} = 1 - \alpha|v|$$

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial w} = -\frac{\alpha}{2}w + \frac{\alpha}{2}|w|$$

Les expressions (2) et (4) sont toujours positives. $\frac{\partial H}{\partial v}$ est positive sous la condition de CFL

$$\sup_j |u_j^n| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Finalement le schéma est monotone sous la condition de CFL $\sup_j |u_j^n| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

On en déduit que notre schéma est entropique.

2.4 - On travaille par récurrence. On suppose que $u_j^n \geq 0$ pour tout j . u_j^{n+1} est donné par $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$. La monotonie de H implique $u_j^{n+1} \geq H(0, 0, 0) = 0$.

2.5 - Plaçons-nous dans une zone où $u_j^n \geq 0$. Dans ce cas $a(u) \geq 0$. Le schéma s'écrit (après un petit calcul)

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\alpha}{2}((u_{j-1}^n)^2 - (u_j^n)^2),$$

ce qui correspond à un schéma décentré à gauche.

De même pour une zone où $u_j^n \leq 0$, on trouve un schéma décentré à droite

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\alpha}{2}((u_j^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2).$$

Exercice 3. Le schéma de Lax-Wendroff

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} \left(a_{j+\frac{1}{2}}^n (f_{j+1}^n - f_j^n) - a_{j-\frac{1}{2}}^n (f_j^n - f_{j-1}^n) \right)$$

où $f_j^n = \frac{(u_j^n)^2}{2}$, $a_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}$ et $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

3.1 - Le schéma peut s'écrire sous la forme conservative

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_j^{n+1}) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$

avec $g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \frac{\alpha}{2} \frac{u+v}{2}(f(v) - f(u))$.

Le flux numérique g vérifie $g(u, u) = f(u)$. Le schéma est donc consistant avec l'équation de Burgers et est donc d'ordre 1 au moins..

3.2 - On calcule l'erreur de troncature

$$\epsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^{n+1}) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)}{\Delta x},$$

où $\bar{u}(x, t)$ est solution exacte de l'équation de Burgers et $\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t^n)$.

En faisant un DL on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon_j^n = & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t^n) \\ & + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) \right)^2 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\ & + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) \right)^2 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\ & + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2). \end{aligned}$$

En dérivant la relation de consistance $g(u, u) = f(u)$ on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = f'(u) = u.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^n) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) = 0.$$

En utilisant l'expression de g et en dérivant on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) &= \frac{1}{2}u + \frac{\alpha}{2}u^2 \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) &= \frac{1}{2}u - \frac{\alpha}{2}u^2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, u) &= \frac{1}{2} + \alpha u \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, u) &= \frac{1}{2} - \alpha u, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) &= -\alpha u^2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, u) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, u) &= -2\alpha u. \end{aligned}$$

En utilisant tout ce qu'on a fait précédemment, l'erreur de troncature devient

$$\begin{aligned} \epsilon_j^n &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t^n) \\ &\quad - \Delta t \bar{u}_j^n \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t^n) \right)^2 - \frac{\Delta t}{2} (\bar{u}_j^n)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2). \end{aligned}$$

On repart de l'équation de Burgers qu'on dérive par rapport au temps (la solution est supposée régulière),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - 2\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 - \bar{u}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'erreur de troncature on obtient finalement

$$\epsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

Le schéma est donc d'ordre 2 (au moins).

3.3 - En l'appliquant notre schéma à la donnée initiale suivante :

$$u_j^0 = \begin{cases} w & \text{si } j < 0 \\ -w & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

on obtient $u_j^n = u_j^0$ pour tout j . La solution est stationnaire. La ligne de choc est d'équation $\sigma(t) = 0$, elle vérifie bien RH. Par contre, dans le cas où $w < 0$, on a $u^- < u^+$ au niveau de la ligne de discontinuité ce qui n'est pas entropique.

Exercice 4. Erreur de troncature et schémas monotones

Soit un schéma sous forme conservative :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (g(u_{j+1}^n, u_j^n) - g(u_j^n, u_{j-1}^n)), \quad \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

consistant avec l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0.$$

4.1 - On reprend le résultat établi à l'exercice précédent question 2 et on obtient directement l'erreur de troncature

$$\epsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{u}) \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t^2)$$

4.2 - On dérive l'équation (5) par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x}(f(\bar{u})) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t}(f(\bar{u})) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x}(f(\bar{u})) \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\bar{u})^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

4.3 - C'est immédiat en utilisant ce qu'on vient de faire aux 2 questions précédentes.

4.4 - Le schéma étant monotone, on sait que la fonction H définie par $H(u, v, w) = v - \alpha(g(v, w) - g(u, v))$ est croissante par rapport à chacune de ses variables, d'où

$$(6) \quad \frac{\partial H}{\partial u}(u, u, u) = \alpha \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) \geq 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial H}{\partial v}(u, u, u) = 1 - \alpha \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right) \geq 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial H}{\partial w}(u, u, u) = -\alpha \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \geq 0.$$

En utilisant la relation de consistance $g(u, u) = f(u)$ dérivée par rapport à u on obtient

$$\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) = a(u).$$

Par conséquent

$$\beta(u, \alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right).$$

L'inégalité (7) nous permet de majorer $\beta(u, \alpha)$

$$\beta(u, \alpha) \leq \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2.$$

Enfin (6) et (8) nous permettent d'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right) \geq \left| \frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right|.$$

Finalement $\beta(u, \alpha) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

4.5 - Plaçons-nous dans le cas où $\beta(u, \alpha) = 0$ pour tout u . On a donc les deux égalités suivantes (qui étaient des inégalités dans la démonstration précédente)

$$(9) \quad \frac{\partial H}{\partial v} = 1 - \alpha \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right) = 0$$

$$(10) \quad \beta(u, \alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) + \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) - \frac{\partial}{\partial v} g(u, u) \right)^2 = 0, .$$

L'égalité (10) nous donne $\frac{\partial}{\partial u} g(u, u) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial v} g(u, u) = 0$. Distinguons les 2 cas :

1. $\frac{\partial}{\partial u}g(u, u) = 0$ donc $\frac{\partial}{\partial v}g(u, u) = -\frac{1}{\alpha}$ et $a(u) = -\frac{1}{\alpha}$. La fonction f (définie à une constante près) est donc linéaire,

$$f(u) = -\frac{1}{\alpha}u.$$

L'équation (5) est une équation de transport de vitesse $-\frac{1}{\alpha}$.

2. $\frac{\partial}{\partial v}g(u, u) = 0$ donc $\frac{\partial}{\partial u}g(u, u) = \frac{1}{\alpha}$ et $a(u) = \frac{1}{\alpha}$. La fonction f (définie à une constante près) est donc linéaire,

$$f(u) = \frac{1}{\alpha}u.$$

L'équation (5) est une équation de transport de vitesse $\frac{1}{\alpha}$.

4.6 - Sauf dans le cas exceptionnel ci-dessus où l'on travaille avec l'équation de transport vérifiant $|a|\Delta t/\Delta x = 1$, un schéma monotone est d'ordre 1 (au plus).