

# Raffinement de maillage pour un couplage entre deux fluides différents

Véronique Duwig (veronique.duwig@edf.fr)

Les réponses aux questions seront mises sous la forme d'un rapport illustré par des résultats numériques. Les programmes seront mis en annexe.

## 1 Présentation du problème

On se propose de modéliser la propagation d'une onde dans un milieu constitué de deux fluides différents. On considère tout d'abord un fluide homogène qu'on modélise par les équations de l'acoustique linéaire. On discrétise ces dernières en espace et en temps pour obtenir un schéma explicite et stable sous une condition de type CFL qui dépend des caractéristiques du fluide. On s'intéresse ensuite à un milieu "stratifié" constitué de deux fluides. Dans un premier temps on construit un schéma "global pour le milieu". Dans un deuxième temps on s'intéressera à un couplage des deux fluides homogènes.

## 2 Les équations de l'acoustique en milieu homogène

### 2.1 Les équations sous forme forte

On considère un domaine  $\Omega$  occupé par un fluide compressible au repos (pas d'écoulement), homogène, non visqueux de masse volumique notée  $\rho$ . On s'intéresse à la propagation d'une onde, de vitesse  $c$ , dans ce fluide. On note  $p$  et  $v$  les petites variations de pression et vitesse autour de la position d'équilibre du fluide et engendrées par l'onde. Les équations dans le fluide en pression-vitesse sont

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \rho \operatorname{div}(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2)$$

On prend, pour simplifier, des conditions aux limites de surface libre au bord du domaine (noté  $\partial\Omega$ ), ie

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3)$$

On suppose que l'onde est générée par une condition initiale  $(p_0, v_0)$ ,

$$\begin{aligned} p_{t=0} &= p_0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{t=0} &= v_0 & \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Les équations (1), (2) associée à la condition aux limites (3) et à la condition initiale (4) constitue notre problème noté  $\mathcal{P}$ .

Sous les hypothèses que la condition initiale  $(p_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2$ , le problème  $\mathcal{P}$  admet une unique solution ( $T > 0$  est donné)

$$(p, v) \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2)$$

## 2.2 Les équations sous forme faible

**Question 1** Montrer que la formulation variationnelle associée à  $\mathcal{P}$  s'écrit :

Trouver  $(p, v) \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2)$  tel que  $\forall (q, w) \in H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{c^2 \rho} p q - \int_{\Omega} v \cdot \nabla q &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \cdot w + \int_{\Omega} \nabla p \cdot w &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

En déduire que la formulation variationnelle possède une solution.

**Question 2** Montrer que si

$$(p, v) \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2)$$

est solution du problème variationnel (5) et qu'il vérifie les conditions initiales (4) alors  $(p, v)$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ .

En déduire que le problème variationnel possède une unique solution.

## 2.3 Discrétisation en espace

$\Omega$  est dorénavant un rectangle qu'on maille avec des carrés de côté  $h$  (cf. figure 1).

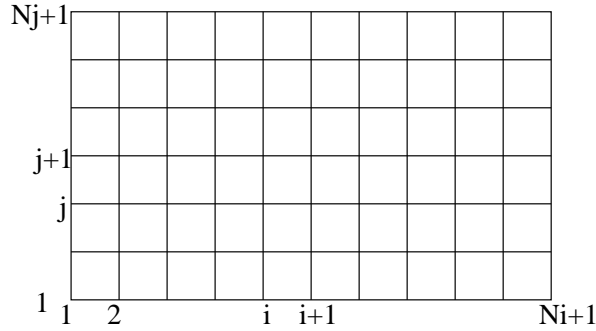


FIG. 1 – Maillage du domaine

L'espace des vitesses approché est noté  $V_h$ .

Les fonctions de base pour  $v_x$  sont  $P_1$ -continues en la variable  $y$  et constantes suivant  $x$ . Les DDL (degrés de liberté) sont situés au milieu des arêtes parallèles à  $Ox$ . On les repèrera par les coordonnées  $(i + \frac{1}{2}, j)$ . Le support de la fonction de base "repérée" par  $(i + \frac{1}{2}, j)$  est constitué des mailles  $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$  et  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$  pour une arête intérieure et de la maille  $(i + \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$  pour une arête du bord bas ou haut.

Les fonctions de base pour  $v_y$  sont  $P_1$ -continues en la variable  $x$  et constantes suivant  $y$ . Les DDL sont situés au milieu des arêtes parallèles à  $Oy$ . On les repèrera par les coordonnées  $(i, j + \frac{1}{2})$ . Le support de la fonction de base "repérée" par  $(i, j + \frac{1}{2})$  est

constitué des mailles  $\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$  et  $\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$  pour une arête intérieure et de la maille  $\left(i \pm \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$  pour une arête du bord gauche ou droit.

L'espace de la pression approché  $P_h$  est constitué des fonctions  $Q_1$ -continues. Les DDL sont situés au niveau des noeuds  $(i, j)$  intérieurs au domaine.

$N_p$  et  $N_v$  sont les nombres de degrés de liberté respectivement en pression et en vitesses. On note  $\{\phi_k^v\}_{k=1, \dots, N_v}$  les fonctions de base pour les vitesses et  $\{\phi_k^p\}_{k=1, \dots, N_p}$  celles pour la pression.

**Question 3** *Que valent  $N_p$  et  $N_v$  ? Que valent les fonctions  $\phi_k^v$  et  $\phi_k^p$ .*

On va approcher le problème variationnel (5) par un problème variationnel posé en dimension fini. Pour cela on récrit (5) en travaillant dans l'espace  $P_h \times V_h$ .

**Question 4** *Ecrire le problème variationnel posé en dimension fini. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme*

$$M_P \frac{d}{dt} P - KV = 0 \quad (6)$$

$$M_V \frac{d}{dt} V + K^T P = 0. \quad (7)$$

Donner l'expression des matrices  $M_P$ ,  $M_V$  et  $K$  en fonction des  $\phi_k^v$  et  $\phi_k^p$ .

## 2.4 Discrétisation en temps

La discrétisation en temps se fait par différences finies. On note  $\Delta t$  le pas en temps. La pression est discrétisée à l'instant  $(n + \frac{1}{2}) \Delta t$  et les vitesses à l'instant  $n \Delta t$ .

**Question 5** *Donner la discrétisation de l'équation (6) à l'instant  $n \Delta t$  et celle de l'équation (7) à l'instant  $(n + \frac{1}{2}) \Delta t$ .*

*Indication : on pourra s'inspirer du schéma de la question 9.*

**Question 6** *Calculer les termes des matrices  $M_P$ ,  $M_V$  et  $K$ . Quelles sont les propriétés de ces matrices (symétrie, profil, ...). Montrer que  $M_P$  et  $M_V$  sont définies positives.*

**Question 7** *Connaissant  $P^{n-\frac{1}{2}}$  et  $V^n$ , écrire les formules permettant de déterminer  $P^{n+\frac{1}{2}}$  et  $V^{n+1}$ . On remarquera que la détermination se fait par un schéma implicite.*

### 2.4.1 Condensation de masse

On utilise dorénavant une méthode de condensation de masse pour calculer les intégrales des matrices  $M_P$ ,  $M_V$  et  $K$ . Cette méthode consiste à approximer les intégrales par une formule de quadrature

$$\int_Q f dx \approx \frac{h^2}{4} \sum_{M \text{ sommets de } Q} f(M),$$

où  $Q$  est dans notre cas un carré de côté  $h$ .

**Question 8** *En utilisant la formule de quadrature précédente, calculer les termes des matrices  $M_P$ ,  $M_V$  et  $K$ . Quelle est la particularité des matrices  $M_P$  et  $M_V$  ?*

*Expliquer pourquoi le schéma établi à la question 5 et utilisant les matrices précédentes est explicite.*

**Question 9** Montrer qu'en utilisant la condensation de masse, le schéma établi à la question 7 peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\frac{c^2 \rho}{h} \left[ (V_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n - (V_x)_{i-\frac{1}{2},j}^n + (V_y)_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (V_y)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right], \\ \rho \frac{(V_x)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (V_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{h} \left[ P_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right], \\ \rho \frac{(V_y)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (V_y)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{h} \left[ P_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} P_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= P_{N_i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_j + 1 \\ P_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} &= P_{i,N_j+1}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_i + 1. \end{aligned}$$

Montrer que  $(V_x)_{i+\frac{1}{2},1}^n = (V_x)_{i+\frac{1}{2},N_j+1}^n = 0$  et que  $(V_y)_{1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (V_y)_{N_i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0$ .

On peut montrer que le schéma précédent est stable sous la condition de CFL

$$c \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Question 10** Coder le schéma précédent (question 9) dans votre langage favori (matlab, scilab, fortran, C ...). On prendra les valeurs numériques suivantes :

- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- $c = 1500 \text{ m/s}$ ,
- $h = 10^{-4} \text{ m}$  et  $\Delta t = h/c/\sqrt{2}$ ,
- $N_i = 50$ ,
- $N_j = 60$ ,
- condition initiale : on prend une condition initiale en pression ; les vitesses sont donc nulles  $(V_x)_{i+\frac{1}{2},j}^1 = 0$  et  $(V_y)_{i,j+\frac{1}{2}}^1 = 0$  et

$$P_{i,j}^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(i-26)^2 + (j-46)^2}{2 \cdot 2^2}\right) & \text{si } -8 \leq i-26 \leq 8 \text{ et } -8 \leq j-46 \leq 8 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Tracer le module de la vitesse et la pression pour plusieurs instants  $n\Delta t$  pour illustrer un phénomène de propagation de l'onde. Que se passe-t-il au bord du domaine ?

**Question 11** Relancer les calculs précédents en doublant la valeur de  $\Delta t$ , les autres valeurs restant les mêmes. Qu'observe-t-on (c'est ce qu'on appelle de l'instabilité) ?

Pour travailler avec un schéma stable on impose dans toute la suite  $c \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Pour éviter des phénomènes de dispersion numérique, on préférera prendre  $\Delta t$  le plus proche de  $\frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . De plus, pour faire une simulation à un temps donné, plus  $\Delta t$  est grand est moins le coût de calculs est élevé puisqu'il y a moins d'itérations. Dans le cas d'un matériau homogène on peut travailler avec la valeur optimale  $\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Pour un matériau hétérogène, c'est  $\max(c)$  qui impose le pas de temps pour éviter des phénomènes d'instabilité. On aura alors de la dispersion numérique aux endroits où  $c < \max c$ .

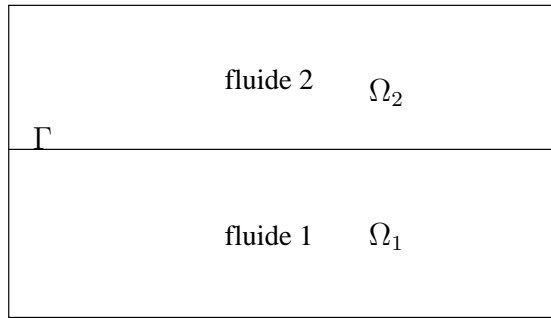


FIG. 2 – Configuration du problème

### 3 Les équations de l’acoustique en milieu hétérogène

On s’intéresse désormais à un milieu constitué de deux fluides différents (figure 2).

Le fluide 1 est caractérisé par une masse volumique et une vitesse des ondes  $(\rho_1, c_1)$  et le fluide 2 par  $(\rho_2, c_2)$ . Les fonctions  $\rho$  et  $c$  sont donc constantes par morceaux.

**Question 12** On suit la même démarche que précédemment et on utilise le maillage suivant (figure 3)

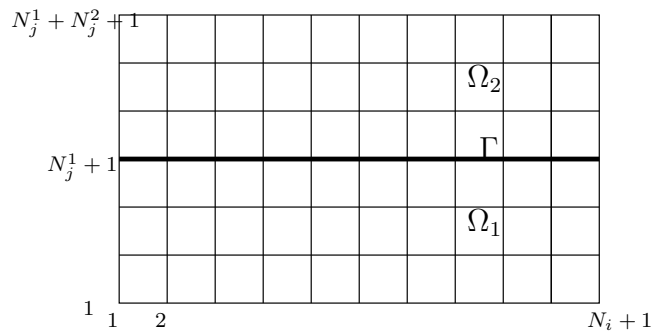


FIG. 3 – Maillage du domaine  $\Omega$

Écrire le schéma discrétisé en espace et en temps correspondant au nouveau problème (on l’exprimera sous la même forme que celui de la question 9).

**Question 13** Coder ce nouveau schéma. Valider ce dernier en prenant les mêmes valeurs numériques que dans le cas homogène, ie  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  et  $c_1 = c_2 = c$  et comparer les résultats.

**Question 14** Faire une simulation avec les données suivantes :

- $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- $c_1 = 3000 \text{ m/s}$ ,
- $c_2 = 1500 \text{ m/s}$ ,
- $h = 10^{-4} \text{ m}$  et  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}}h/c_1$ ,
- $N_i = 50$ ,
- $N_j^1 = 30$ ,

- $N_j^2 = 30$ ,
- condition initiale identique à celle du cas homogène.

Refaire une autre simulation en prenant  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}}h/c_2$ . Qu'observe-t-on?

## 4 Raffinement de maillage et couplage

Pour éviter les phénomènes de dispersion numérique et d'instabilité, nous imposons la condition  $c \frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  dans les 2 domaines. Pour cela, on choisit des pas d'espace différents ( $h_1$  et  $h_2$ ) et le même pas de temps  $\Delta t$ . L'interface  $\Gamma$  est maillée avec des segments de longueur  $\min(h_1, h_2)$ . On résout séparément les équations dans les deux milieux et on raccorde ces derniers en imposant des conditions de transmission.

Dans toute la suite on suppose que  $c_1 = 2c_2$  et donc que  $h_1 = 2h_2$ . On utilise le maillage suivant (figure 4).

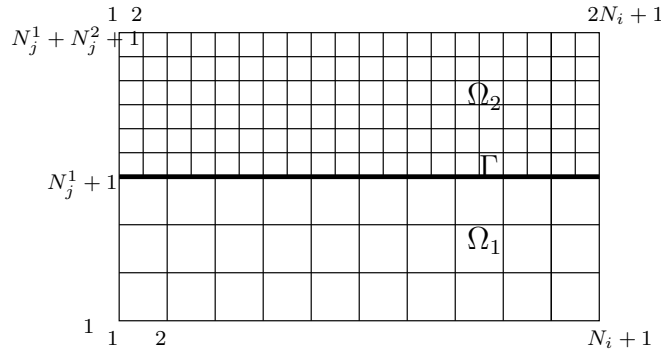


FIG. 4 – Maillage du domaine  $\Omega$

### 4.1 Les équations sous forme forte

On considère les équations suivantes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_1}{\partial t} + c_1^2 \rho_1 \operatorname{div}(v_1) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \\
 \frac{\partial p_2}{\partial t} + c_2^2 \rho_2 \operatorname{div}(v_2) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\
 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla p_1 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \\
 \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \nabla p_2 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Les conditions de transmission à l'interface sont

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_2 \quad \text{sur } \Gamma, \\
 v_1 \cdot n &= v_2 \cdot n \quad \text{sur } \Gamma,
 \end{aligned} \tag{9}$$

où  $n$  est la normale sortante à  $\Omega_1$ . On pose  $\lambda = v_1 \cdot n = v_2 \cdot n$ .  $\lambda$  joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange.

On prend des conditions aux limites de surface libre au bord du domaine  $\partial\Omega$ , ie

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \\ p_2 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2. \end{aligned} \quad (10)$$

On suppose que l'onde est générée par une condition initiale  $(p_0, v_0)$  dans le domaine  $\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned} p_2|_{t=0} &= p_0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ v_2|_{t=0} &= v_0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ p_1|_{t=0} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \\ v_1|_{t=0} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1. \end{aligned} \quad (11)$$

On introduit les espaces suivants

$$\begin{aligned} X_1 &= \{q_1 \in H^1(\Omega_1) / q_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1\} \\ X_2 &= \{q_2 \in H^1(\Omega_2) / q_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2\}. \end{aligned}$$

Les équations (8) complétées par les conditions de transmission (9), la condition aux limites (10) et la condition initiale (11) constituent notre problème noté  $\mathcal{P}_c$ . On peut montrer que pour  $(p_0, v_0) \in X_2 \times (L^2(\Omega_2))^2$ , notre problème admet une unique solution

$$(p_1, p_2, v_1, v_2) \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times (L^2(\Omega_1))^2 \times (L^2(\Omega_2))^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; X_1 \times X_2 \times (L^2(\Omega_1))^2 \times (L^2(\Omega_2))^2).$$

## 4.2 Les équations sous forme faible

**Question 15** *Etablir la formulation variationnelle suivante :*

*Trower*

$$\begin{aligned} (p_1, p_2, v_1, v_2, \lambda) &\in \\ &(\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times (L^2(\Omega_1))^2 \times (L^2(\Omega_2))^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; X_1 \times X_2 \times (L^2(\Omega_1))^2 \times (L^2(\Omega_2))^2)) \\ &\times \mathcal{C}^0(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \frac{1}{c_1^2 \rho_1} p_1 q_1 - \int_{\Omega_1} v_1 \cdot \nabla q_1 + \int_{\Gamma} \lambda q_1 &= 0 \quad \forall q_1 \in X_1, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \frac{1}{c_2^2 \rho_2} p_2 q_2 - \int_{\Omega_2} v_2 \cdot \nabla q_2 - \int_{\Gamma} \lambda q_2 &= 0 \quad \forall q_2 \in X_2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho_1 v_1 \cdot w_1 + \int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot w_1 &= 0 \quad \forall w_1 \in (L^2(\Omega_1))^2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho_2 v_2 \cdot w_2 + \int_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot w_2 &= 0 \quad \forall w_2 \in (L^2(\Omega_2))^2, \\ \int_{\Gamma} (p_1 - p_2) \mu &= 0 \quad \forall \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{aligned} \quad (12)$$

On admet que la formulation variationnelle précédente admet une solution et une seule.

## 4.3 Discrétisation en espace et en temps

**Question 16** *Discrétiser en espace<sup>1</sup> et en temps la formulation variationnelle précédente en suivant la même démarche que pour le schéma "global". Remarquons qu'il faut utiliser des*

1. les pas d'espace  $h_1$  et  $h_2$  sont différents

demi-fonctions de base pour la discrétisation des espaces  $X_1$  et  $X_2$  au niveau de l'interface  $\Gamma$ . Expliciter les fonctions de base  $\{\phi_k^{v1}\}_{k=1,\dots,N_{v1}}$  (vitesses dans  $\Omega_1$ ),  $\{\phi_k^{v2}\}_{k=1,\dots,N_{v2}}$  (vitesses dans  $\Omega_2$ ),  $\{\phi_k^{p1}\}_{k=1,\dots,N_{p1}}$  (pression dans  $\Omega_1$ ) et  $\{\phi_k^{p2}\}_{k=1,\dots,N_{p2}}$  (pression dans  $\Omega_2$ ). Pour la discrétisation de l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  on utilise les fonctions  $P_1$ -continues sur  $\Gamma$  (rappelons que le pas de maillage sur  $\Gamma$  est  $h_2$ ). On note  $\{\phi_k^\lambda\}_{k=1,\dots,N_\lambda}$  les fonctions de base associées.

Montrer qu'on obtient le schéma suivant

$$\begin{aligned}
M_{P1} \frac{P_1^{n+\frac{1}{2}} - P_1^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - K_1 V_1^n + C_1 \Lambda^n &= 0 \\
M_{P2} \frac{P_2^{n+\frac{1}{2}} - P_2^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - K_2 V_2^n - C_2 \Lambda^n &= 0 \\
M_{V1} \frac{V_1^{n+1} - V_1^n}{\Delta t} + K_1^T P_1^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\
M_{V2} \frac{V_2^{n+1} - V_2^n}{\Delta t} + K_2^T P_2^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\
C_1^T P_1^{n+\frac{1}{2}} - C_2^T P_2^{n+\frac{1}{2}} &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Exprimer les coefficients des matrices  $M_{P1}$ ,  $M_{P2}$ ,  $M_{V1}$ ,  $M_{V2}$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  en fonction des fonctions de bases  $\{\phi_k^{v1}\}_{k=1,\dots,N_{v1}}$ ,  $\{\phi_k^{v2}\}_{k=1,\dots,N_{v2}}$ ,  $\{\phi_k^{p1}\}_{k=1,\dots,N_{p1}}$ ,  $\{\phi_k^{p2}\}_{k=1,\dots,N_{p2}}$  et  $\{\phi_k^\lambda\}_{k=1,\dots,N_\lambda}$ .

#### 4.4 Etapes de la résolution

**Question 17** En utilisant les deux premières équations de (13) et la dernière, montrer que  $\Lambda^n$  est solution de

$$(C_1^T M_{P1}^{-1} C_1 + C_2^T M_{P2}^{-1} C_2) \Lambda^n = -C_2^T M_{P2}^{-1} K_2 V_2^n + C_1^T M_{P1}^{-1} K_1 V_1^n.$$

Montrer que la matrice  $(C_1^T M_{P1}^{-1} C_1 + C_2^T M_{P2}^{-1} C_2)$  est inversible.

**Question 18** Connaissant  $V_1^n$ ,  $V_2^n$ ,  $P_1^{n-\frac{1}{2}}$  et  $P_2^{n-\frac{1}{2}}$ , proposer un algorithme permettant de déterminer  $V_1^{n+1}$ ,  $V_2^{n+1}$ ,  $P_1^{n+\frac{1}{2}}$  et  $P_2^{n+\frac{1}{2}}$ .

#### 4.5 Ecriture détaillée du schéma

**Question 19** Que valent  $N_{v1}$ ,  $N_{v2}$ ,  $N_{p1}$ ,  $N_{p2}$  et  $N_\lambda$  ?

**Question 20** Calculer les coefficients des matrices en utilisant la condensation de masse. Pour calculer les termes des matrices  $C_1$  et  $C_2$  on utilisera la formule de quadrature suivante

$$\int_{Ih_2}^{(I+1)h_2} f(x) dx = h_2 \frac{f((I+1)h_2) + f(Ih_2)}{2}.$$

**Question 21** Ecrire le schéma total permettant de déterminer les vitesses et la pression dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sous forme explicite.  $\Lambda^n$  est déterminé par la résolution du système donné à la question 17. On détaillera les coefficients de la matrice  $(C_1^T M_{P1}^{-1} C_1 + C_2^T M_{P2}^{-1} C_2)$  et ceux du second membre. La résolution du système se fera de préférence avec un algorithme utilisant le caractère creux de la matrice à "inverser".



Montrer que pour un noeud  $(i, N_j^1 + 1)$  l'interface le schéma est le suivant :  
pour  $i = 2, \dots, N_i$

$$\begin{aligned} \frac{(P_1)_{i, N_j^1+1}^{n+\frac{1}{2}} - (P_1)_{i, N_j^1+1}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\frac{c_1^2 \rho_1}{h_1} \left[ (V_{1x})_{i+\frac{1}{2}, N_j^1+1}^n - (V_{1x})_{i-\frac{1}{2}, N_j^1+1}^n + 2(V_{1y})_{i, N_j^1+1+\frac{1}{2}}^n \right] \\ &\quad + \frac{2h_2 c_1^2 \rho_1}{h_1^2} \left( \frac{1}{2} \lambda_{2(i-1)}^n + \lambda_{2i-1}^n + \frac{1}{2} \lambda_2^n \right) \end{aligned}$$

et pour  $i = 2, \dots, 2N_i$

$$\frac{(P_2)_{i, N_j^1+1}^{n+\frac{1}{2}} - (P_2)_{i, N_j^1+1}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{c_2^2 \rho_2}{h_2} \left[ (V_{2x})_{i+\frac{1}{2}, N_j^1+1}^n - (V_{2x})_{i-\frac{1}{2}, N_j^1+1}^n + 2(V_{2y})_{i, N_j^1+1+\frac{1}{2}}^n \right] + \frac{2c_2^2 \rho_2}{h_2} \lambda_i^n .$$

## 4.6 Implémentation et applications numériques

**Question 22** Coder le schéma précédent.

**Question 23** Faire une simulation avec les données suivantes :

- $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- $c_1 = 3000 \text{ m/s}$ ,
- $c_2 = 1500 \text{ m/s}$ ,
- $h_2 = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $h_1 = 2h_2$  et  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}} h_1 / c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 / c_2$ ,
- $N_i = 50$ ,
- $N_j^1 = 30$ ,
- $N_j^2 = 30$ ,
- condition initiale identique à celle du cas homogène.

Comparer la solution avec celle du schéma "global" du cas hétérogène. Comparer également les temps de calcul et commenter. Pour des comparaisons plus parlantes, on pourra augmenter la taille du domaine de calcul.