Détermination de la position d'équilibre d'une tige métallique

Véronique Duwig (veronique.duwig@edf.fr)

Les réponses aux questions seront mises sous la forme d'un rapport illustré par des résultats numériques. Les explications et les commentaires sur les méthodes proposées seront les bienvenus. Les programmes seront mis en annexe.

1 Présentation du problème

On considère une tige métallique élastique homogène de longueur L et de section constante σ. Cette tige est soumise à un chargement et on cherche sa position d'équilibre sous ce chargement. Pour simplifier, on travaille en dimension 1 mais la démarche serait la même en dimension supérieure. Un autre avantage de travailler en dimension 1 est qu'on dispose parfois de solutions analytiques (ce qui n'est en général pas le cas en dimension supérieure), ce qui nous permettra de valider nos résultats. On note $u(x)$ le déplacement longitudinal du point M situé en x sans chargement (x est l'abscisse dans la configuration de référence). On note $T^t(x)$ la tension interne exercée en x. Elle correspond à la force exercée par la partie droite de la tige sur la partie de gauche de celle-ci.

2 Les équations continues

On note $\Omega =]0, L[$ la configuration de référence de la barre. La tige est soumise à des forces extérieures f (on suppose que $f \in L^2(\Omega)$).

2.1 Les équations sous forme forte

Le principe fondamental de la statique nous donne

$$-\frac{dT^t}{dx} = f \quad \text{dans } \Omega \,. \tag{1}$$

La loi de comportement (loi de Hooke) s'écrit

$$T^t = E\sigma \frac{du}{dx} \quad \text{dans } \Omega \,, \tag{2}$$

où E est le module d'Young de la tige métallique. E est une fonction bornée, continue par morceaux et strictement positive.

On se donne des conditions aux limites en tension aux extrémités $x = 0$ et en $x = L$,

$$\begin{aligned} T^t(0) &= T_0 \,, \\ T^t(L) &= T_L \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Les équations (1) et (2), munies des conditions aux limites (3) constituent notre problème noté $\mathcal{P}$, d'inconnu (u, T^t).

Question 1 *Ecrire le problème $\mathcal{P}$ uniquement en fonction de la variable u (on élimine l'inconnu T^t).*

2.2 Les équations sous forme faible

Question 2 *A partir des équations établies à la question 1 construire une formulation variationnelle de la forme : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que*

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{4}$$

Expliciter la forme bilinéaire a et la forme linéaire l. Pourquoi ne peut-on pas appliquer Lax-Milgram ?

Question 3 *Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution u à la formulation variationnelle (4).*

Question 4 *Montrer qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution $u \in H^1(\Omega)$ à la formulation variationnelle (4) est la relation suivante*

$$\int_\Omega f + T_L - T_0 = 0\,. \tag{5}$$

Interpréter la condition (5) en terme de bilan de force.

On admet que si la relation (5) est vérifiée, alors il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ à la formulation variationnelle (4). On rappelle que

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega)\, /\, \int_\Omega w = 0 \right\}\,.$$

On travaille désormais avec le problème mixte $\mathcal{P}$ d'inconnu (u, T^t).
Question 5 *Construire un relèvement $T^r \in H^1(\Omega)$ vérifiant $T^r(0) = T_0$ et $T^r(L) = T_L$. On pose $T = T^t - T^r$.*

Question 6 *Montrer que le problème $\mathcal{P}$ permet de construire la formulation variationnelle suivante : trouver $(u,T) \in L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{dT}{dx} x &= \int_\Omega \frac{dT^r}{dx} v + \int_\Omega f v \quad \forall v \in L_0^2(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{1}{E\sigma} T\tau + \int_\Omega u \frac{d\tau}{dx} &= -\int_\Omega \frac{1}{E\sigma} T^r \tau \quad \forall \tau \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

On admet que la formulation variationnelle précédente admet une unique solution $(u,T) \in L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

3 Discrétisation

3.1 Choix des espaces de discrétisation

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est approché par un espace de dimension fini, noté T_h, constitué des fonctions P_1-continues et appartenant à $H_0^1(\Omega)$. L'espace $L_0^2(\Omega)$ est approché par un espace de dimension fini, noté U_h, constitué des fonctions P_0-discontinues et appartenant à $L_0^2(\Omega)$.
Question 7 *Ecrire le problème variationnel (6) posé dans les espaces U_h et T_h.*

On maille notre barre par N segments de longueur h ($L = N * h$). On note $\{\bar{\phi_i}^u\}_{i=1,..,N_u}$ les fonctions de base de U_h et $\{\phi_i^T\}_{i=1,..,N_T}$ les fonctions de base de T_h.

Question 8 *Que valent N_u et N_T ?*

On construit la famille $\{{\phi_i}^u\}_{i=1,..,N}$,

$$ {\phi_i}^u(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (i-1)h < x < ih \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. . $$

Question 9 *A-t-on ${\phi_i}^u \in L^2(\Omega)$? A-t-on ${\phi_i}^u \in L^2_0(\Omega)$?*

On construit la famille $\{{\bar{\phi}_i}^u\}_{i=1,..,N-1}$,

$$ {\bar{\phi}_i}^u(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } (i-1)h < x < ih \\ -1 & \text{si } (N-1)h < x < Nh \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. . $$

Question 10 *Montrer que la famille $\{{\bar{\phi}_i}^u\}_{i=1,..,N-1}$ forme une base de U_h.*

Question 11 *Quelle relation y a-t-il entre ${\bar{\phi}_i}^u$ et ${\phi_i}^u$? Exprimer ${\bar{\phi}_i}^u$ en fonction de ${\phi_i}^u$ et ${\phi_N}^u$.*

Question 12 *Ecrire la formulation variationnelle établie à la question (7) sous la forme d'un système matriciel*

$$ \begin{array}{rcl} -\bar{K}\bar{T} & = & \bar{F} \\ M_T\bar{T} + \bar{K}^T\bar{U} & = & G\,. \end{array} \tag{7} $$

Expliciter les matrices $\bar{K}$ et M_T en fonction des $\bar{\phi}^u_i$ et ϕ^T_i. Que valent les vecteurs $\bar{F}$ et G ?

Question 13 *Ecrire la formulation variationnelle établie à la question (7),* **mais en remplaçant l'espace $\mathbf{U_h}$ par l'espace des fonctions $\mathbf{P_0}$-discontinues** *, sous la forme d'un système matriciel*

$$ \begin{array}{rcl} -KT & = & F \\ M_T T + K^T U & = & G\,. \end{array} \tag{8} $$

Expliciter la matrice K en fonction des ϕ^u_i et ϕ^T_i. Montrer que la matrice K^T n'est pas injective. Quel est son noyau ? Que vaut le vecteur F ?

Question 14 *Construire une matrice Q "de passage" vérifiant (on utilisera la relation entre $\bar{\phi}^u_i$ et ϕ^u_i)*

$$ \begin{array}{rcl} \bar{K} & = & QK \\ \bar{F} & = & QF\,. \end{array} $$

Quel est le noyau de Q ? Montrer que $Ker(Q) = (Im(K))^{\perp}$. Interpréter le produit matriciel à gauche par Q comme opérations sur les lignes.

Question 15 *Ecrire (8) sous la forme $AU = B$. Expliciter la matrice A et le vecteur B. De même, écrire (7) sous la forme $\bar{A}\bar{U} = \bar{B}$ et expliciter la matrice $\bar{A}$ et le vecteur $\bar{B}$. Les matrices A et $\bar{A}$ sont-elles inversibles ? Trouver une relation entre A et $\bar{A}$.*

Question 16 *Montrer que sous la condition $F \in Im(K)$, le vecteur $Q^T\bar{U}$ est solution de $AU = B$. Relier la condition $F \in Im(K)$ à la relation de compatibilité (5).*

3.2 Condensation de masse

Pour calculer les intégrales des matrices M_T et K et des vecteurs F et G on utilise la formule de quadrature suivante

$$\int_{ih}^{(i+1)h} g(x)dx \approx h\frac{g(ih) + g((i+1)h)}{2} .$$

Question 17 *A l'aide de la formule de quadrature précédente, calculer les termes des matrices M_T et K ainsi que F et G sans faire d'approximation sur f et en prenant pour T^r la fonction P_1-continue telle que*

$$T^r(ih) = \begin{cases} T_0 & si\ i = 0 \\ T_L & si\ i = N \\ 0 & sinon \end{cases} .$$

Quelle est la particularité de M_T ? Montrer que $F \in Im(K)$.

4 Résolution numérique

Question 18 *Construire la matrice $\bar{A}$ et le vecteur $\bar{B}$ en utilisant les questions précédentes et implémenter dans votre language favori (matlab, scilab, fortran,C ...) la résolution de $\bar{A}\bar{U} = \bar{B}$. On utilisera un algorithme exploitant le caractère creux des matrices. Quel est le profil de $\bar{A}$ et de A. Construire le vecteur $U = Q^T\bar{U}$.*

Question 19 (Application numérique) *Dans un premier temps on considère une barre homogène.*

- $N = 50$;
- $\sigma = 0.0001\, m^{-2}$;
- $h = 0.001\, m$;
- $\rho = 7700\, kg/m^3$;
- $E = E_0 = 2.680.10^{11}\, N/m$;
- $f = 0$;
- $T_0 = 1$;
- $T_L = 1$.

Tracer le déplacement U. Calculer une solution analytique du problème $\mathcal{P}$ dans ce cas particulier (cas homogène) et comparer avec la solution numérique U. Quelles sont les autres solutions du problème $\mathcal{P}$?

Dans un deuxième temps on considère une barre hétérogène. On reprend les données précédentes mais on choisit désormais un module d'Young non constant

$$E(x) = \frac{E_0}{(a\,x + b)^4} ,$$

où $a = 0.2/(N-1)$ et $b = 0.9 - a$.

Tracer le déplacement U ainsi que sa dérivée $\frac{U_i - U_{i-1}}{h}$ pour $i = 2, .., N$. Calculer $E(ih)\frac{U_i - U_{i-1}}{h}$ et commenter. Calculer la solution analytique du problème $\mathcal{P}$ qui est de moyenne nulle. Calculer l'erreur commise lors de l'approximation. Proposer une amélioration.

5 Algorithme d'Uzawa

On se propose de trouver une solution au système matriciel (8) sans passer par le changement de base (donc sans utiliser la matrice Q).

5.1 Présentation générale de l'algorithme de Uzawa

5.1.1 Un problème d'optimisation avec contraintes

On considère le problème de minimisation avec contraintes d'égalité

$$\inf\left\{\frac{1}{2}T^T\,M_T T,\quad K^T\,T=-F\right\}. \tag{9}$$

On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(T,U)=\frac{1}{2}T^T\,M_T T+U^T(K^T T+F)\,.$$

$U\in\mathbb{R}^N$ est le multiplicateur de Lagrange imposant les contraintes d'égalité.

On calcule la dérivée de $\mathcal{L}$ par rapport à T. Le couple solution (T,U) annule ce gradient,

$$M_T T+K\,U=0\,.$$

On calcule ensuite la dérivée de $\mathcal{L}$ par rapport au multiplicateur de Lagrange U. Le couple solution (T,U) annule ce gradient et on retrouve l'écriture des contraintes,

$$K^T\,T=-F\,.$$

La solution du problème (9) [1] est donc la solution du système matriciel (8).

5.1.2 Résolution par l'algorithme d'Uzawa

Pour déterminer la solution de notre problème nous résolvons le problème (9) par la méthode d'Uzawa.

1. **Initialisation** $U^0\in\mathbb{R}^N$ quelconque.
2. **Itération** $k\geq 0$
   Détermination de T^k par résolution du problème $\inf_T\{\mathcal{L}(T,U^k)\}$, ce qui revient à trouver T^k tel que $M_T T^k+KU^k=0$.
   Construction de U^{k+1} (μ est un paramètre positif à choisir),

$$U^{k+1}=U^k+\mu(K^T\,T^k+F)\,.$$

Dans ce cas, l'algorithme de Uzawa revient à un algorithme de gradient à pas constant.

5.2 Application de l'algorithme d'Uzawa

5.2.1 Étude de la convergence

Question 20 *Montrer que l'algorithme d'Uzawa est un algorithme de point fixe. On explicitera la fonction g telle que*

$$U^{n+1}=g(U^n)\,.$$

Question 21 *Montrer que l'algorithme converge sous la condition*

$$-1<\mathsf{vp}_{/\mathcal{U}}(I-\mu\,KM_T^{-1}K^T)<1\,, \tag{10}$$

où $\mathcal{U}$ désigne le vectoriel engendré par les $\{U^k\}_{k\geq 0}$ et $\mathsf{vp}_{/\mathcal{U}}(M)$ désigne les valeurs propres de la restriction de l'opérateur M à l'espace $\mathcal{U}$.

1. à condition qu'elle existe

Question 22 *Montrer que* $\mathcal{U} \in Im(K)$ *sous la condition que* $F \in Im(K)$ *(on considérera cette condition vérifiée par la suite). On pourra procéder par récurrence sur* n*. En déduire qu'il existe des paramètres* μ *vérifiant (10).*

Question 23 *Dans le cas d'un matériau homogène, proposer une valeur de* μ *permettant la convergence de l'algorithme.*
Indication : on pourra montrer que la matrice $-KK^T + \lambda I$ *avec* $\lambda > 4$ *est à diagonale strictement dominante (donc inversible) et donc que la valeur propre max de* $K\,K^T$ *est inférieure à* 4*.*

Question 24 *Dans le cas d'un matériau hétérogène, proposer une valeur de* μ *permettant la convergence de l'algorithme. On utilisera le résultat de la question précédente et le fait que la valeur propre max de* $KM_T^{-1}K^T$ *est inférieure au produit de la valeur propre max de* KK^T *et de la valeur propre max de* M_T^{-1}*.*

5.2.2 Implémentation

Question 25 (Application numérique) *Implémenter la résolution du problème par l'algorithme d'Uzawa. Appliquer la méthode aux deux exemples précédents (cf. question 19). On prendra comme critère de convergence : norme(*$KT^n + F$*)/norme(F)*$< 10^-3$*. Comparer les solutions obtenues.*

Question 26 *En interprétant les itérations de l'algorithme d'Uzawa comme des itérations en temps et en posant* $\mu = \Delta t$ *(pas de temps), montrer qu'on résout en fait un problème diffusif (genre équation de la chaleur).*

6 Comparaison des méthodes et discussion

Question 27 *Comparer le temps de calcul des 2 méthodes en faisant varier* N*. Quelle est votre conclusion sur les 2 méthodes (avantages, inconvénients ....) ?*