Étude de la propagation d'une onde dans une tige métallique hétérogène

Véronique Duwig (veronique.duwig@edf.fr)

Les réponses aux questions seront mises sous la forme d'un rapport illustré par des résultats numériques. Les programmes seront mis en annexe.

1 Présentation du problème

On considère une tige métallique élastique homogène de masse volumique ρ de longueur L et de section constante σ. On suppose qu'elle est au repos et on s'intéresse aux vibrations longitudinales de la tige lorsqu'elle est traversée par une onde. On note $u(x,t)$ le déplacement longitudinal à l'instant t du point M situé en x lorsque la barre est au repos (configuration de référence) et $T(x,t)$ la tension interne exercée en x et à l'instant t.

Pour simplifier, toute l'étude de fait en dimension 1. La démarche est la même en dimension supérieure et la méthode de couplage proposée gagne en intérêt en dimension 2 et 3.

2 Le problème continu

On note $\Omega =]0, L[$ la configuration de référence de la barre.

2.1 Les équations sous forme forte

Le principe fondamental de la dynamique nous donne

$$\rho\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega\,. \tag{1}$$

La loi de comportement (loi de Hooke) s'écrit

$$T = E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega\ , \tag{2}$$

où E est le module d'Young de la tige métallique. E et ρ sont des fonctions continues par morceaux, bornées et strictement positives. On définit la grandeur $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

Question 1 *Montrer que c est homogène à une vitesse.*

Question 2 *En utilisant les équations (1) et (2) écrire une unique équation ne faisant intervenir que l'inconnu u. On obtient l'équation des ondes en dimension 1.*

On suppose que la barre est encastrée à ces deux extrémités, ie

$$u(0) = u(L) = 0\,. \tag{3}$$

On munit notre système d'équations d'une condition initiale

$$\begin{aligned} u(.,t=0) &= u_0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(.,t=0) &= u_1\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Les équations (1) et (2) complétées par la condition aux limites (3) et la condition initiale (4) constituent notre problème noté $\mathcal{P}$. On peut montrer que pour $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, notre problème admet une unique solution

$$(u,T) \in (\mathcal{C}^0(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0,T;L^2(\Omega))) \times \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))\,.$$

2.2 Les équations sous forme faible

Question 3 *Montrer que le couple (u,T) solution de $\mathcal{P}$ vérifie la formulation variationnelle*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^2}\int_\Omega \rho\sigma u v + \int_\Omega T\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{1}{E\sigma}T\tau - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\tau &= 0 \quad \forall \tau \in L^2(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

En déduire que la formulation variationnelle possède au moins une solution.

Question 4 *Montrer que si le couple (u,T) est solution de (5) et vérifie la condition initiale (4) alors il est solution de $\mathcal{P}$. En déduire que la formulation variationnelle (5) admet une unique solution.*

3 Discrétisation en espace

3.1 Choix des espaces

On maille la tige par N segments de longueur h ($L = N*h$). L'espace $H_0^1(\Omega)$ est approché par un espace de dimension fini noté U_h constitué des fonctions P_1-continues et appartenant à $H_0^1(\Omega)$. L'espace $L_0^2(\Omega)$ est approché par un espace de dimension fini noté T_h constitué des fonctions P_0-discontinues.

On note $\{{\phi_i}^u\}_{i=1,..,N_u}$ les fonctions de base de U_h et $\{\phi_i^T\}_{i=1,..,N_T}$ les fonctions de base de T_h.

Question 5 *Que valent N_u et N_T ? Expliciter les $\{{\phi_i}^u\}_{i=1,..,N_u}$ et $\{\phi_i^T\}_{i=1,..,N_T}$.*

3.2 Le système matriciel

Question 6 *Récrire la formulation variationnelle (5) en travaillant dans ces espaces approchés. Montrer qu'elle équivaut à la résolution d'un système matriciel*

$$\begin{aligned} M_U\frac{d^2U}{dt^2} + KT &= 0 \\ M_T T - K^T U &= 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

où $U(t=0)$ et $\dfrac{dU}{dt}(t=0)$ correspondent à des discrétisations de u_0 et u_1. Expliciter les matrices M_U, M_T et K en fonction des ϕ_i^u et ϕ_i^T.

4 Discrétisation en temps

On discrétise en temps le système matriciel (6) par différences finies. On note Δt le pas de temps et on obtient

$$\begin{aligned} M_U\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + KT^n &= 0 \\ M_T T^n - K^T U^n &= 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Question 7 *Que prendre pour U^0 et U^1 ?*

Question 8 *On considère U^n et U^{n-1} connus. Donner un algorithme permettant de calculer U^{n+1}. Quels types d'opérations sont nécessaires à la résolution ?*

Question 9 *Déterminer de manière exacte les coefficients des matrices M_U, M_T et K en utilisant la valeur des $\{{\phi_i}^u\}_{i=1,..,N_u}$ et $\{\phi_i^T\}_{i=1,..,N_T}$. Quelles sont les propriétés des matrices (caractère creux, inversibilité ...) ? Quelle est la particularité de M_T ? Expliquer pourquoi le schéma (7) est dit implicite ?*

5 Condensation de masse

On utilise dorénavent une méthode de condensation de masse pour calculer les coefficients des matrices M_U, M_T et K. Cette méthode consiste à approximer les intégrales par une formule de quadrature

$$\int_{ih}^{(i+1)h} g(x)dx \approx h\frac{g(ih) + g((i+1)h)}{2}.$$

Question 10 *A l'aide de la formule de quadrature précédente, calculer les termes des matrices M_U, M_T et K. Quelles sont les propriétés des matrices (caractère creux, inversibilité ...) ? Quelle est la particularité de M_U et de M_T ? Expliquer pourquoi le schéma (7), avec cette approximation, est dit explicite ? Ecrire un algorithme de résolution utilisant le caractère explicite du schéma (on exprimera u_i^{n+1} et T_i^n). Eliminer la variable T et construire un schéma en déplacement uniquement.*

6 Etude de la stabilité par technique énergétique

On travaille sur le système matriciel (7).

6.1 Construction d'une énergie

On pose

$$E^{n+\frac{1}{2}} = (M_T T^{n+1}, T^n) + \left(M_U \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right).$$

Question 11 *Montrer que sous la condition (condition CFL)*

$$M_U - \frac{\Delta t^2}{4} K M_T^{-1} K^T \quad \textit{définie positive,}$$

la quantité $E^{n+\frac{1}{2}}$ est positive. La dénomination énergie est justifiée. Pour traiter le terme $(M_T T^{n+1}, T^n))$, on utilisera l'identité

$$(u, v) = \frac{1}{4}((u + v, u + v) - (u - v, u - v))$$

où $(.,.)$ désigne un produit scalaire.

6.2 Conservation de l'énergie

Question 12 *Montrer que l'énergie se conserve au cours du temps, ie $E^{n+\frac{1}{2}} = E^{n-\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}}$. Indication : prendre la première équation de (7) au rang n et la multiplier par $U^{n+1} - U^{n-1}$, multiplier la différence entre la deuxième équation de (7) au rang $n + 1$ et $n - 1$ par T^n.*

6.3 Stabilité du schéma

En déduire que sous la condition

$$M_U - \frac{\Delta t^2}{4} K M_T^{-1} K^T \quad \text{définie positive,}$$

les suites U^n et T^n sont bornées.

7 Etude d'un milieu homogène

Dans toute cette section on considère une tige homogène, ie que le module d'Young E et la masse volumique ρ sont des constantes.

7.1 Détermination d'une condition CFL

Question 13 *En utilisant les propriétés des matrices montrer que la condition*

$$M_U - \frac{\Delta t^2}{4} K M_T^{-1} K^T \quad \textit{définie positive,}$$

est vérifiée si

$$c\frac{\Delta t}{h} < 1\,.$$

Indication : on pourra montrer que la matrice $-KK^T + \lambda I$ *avec* $\lambda > 4$ *est à diagonale strictement dominante (donc inversible) et donc que la valeur propre max de* $K\,K^T$ *est inférieure à* 4.

Question 14 *Récrire le schéma en déplacement construit à la question 10 en utilisant le fait que le milieu est homogène. Montrer que, sous la condition* $c\frac{\Delta t}{h} = 1$, *ce schéma est exacte pour l'équation des ondes en dimension 1 (on montrera que l'erreur de troncature est nulle).*

On admettra que sous la condition $c\frac{\Delta t}{h} = 1$, le schéma est stable. Pour un milieu homogène on prendra donc $\Delta t = \frac{h}{c}$ et notre schéma est donc exact (pas de dispersion numérique).

7.2 Implémentation et application numérique

Question 15 *Coder, dans votre language préféré (scilab, matlab, fortran, C ...), le schéma en déplacement construit à la question 14.*

Question 16 (Application numérique) *On prendra les valeurs numériques suivantes :*

- $N = 1000$;
- $\sigma = 0.0001\, m^{-2}$;
- $h = 0.001\, m$;
- $\rho = 7700\, kg/m^3$;
- $E = E_0 = 2.680.10^{11}\, N/m$;
-

$$u_0(ih) = u_1(ih) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(i-500)^2}{2*2^2}\right) & si\ \ -10 \le i - 500 \le 10 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Tracer le déplacement pour différents temps $n\Delta t$ (par exemple $n = 100$, $n = 200$ ....). Décrire la solution et la comparer à la condition initiale u_0. Estimer la vitesse de propagation de l'onde. Y a-t-il une atténuation?

Prendre un pas de temps deux fois plus petit. Qu'observez-vous (c'est ce qu'on appelle "dispersion numérique").

Prendre un pas de temps deux fois plus grand que celui donné par la CFL. Qu'observez-vous (c'est ce qu'on appelle un phénomène d'"instabilité").

8 Etude d'un milieu hétérogène constitué de deux milieux homogènes

On considère à présent une barre constituée de deux milieux homogènes $\Omega_1 =]0, L_1[$ et $\Omega_2 =]L_1, L_2[$ de caractéristiques respectives (ρ_1, E_1) et (ρ_2, E_2). La barre est de section σ constante.

8.1 Coefficients de réflexion et de transmission

On s'intéresse au comportement de l'onde au voisinage de l'interface, située en $x = L_1$, entre les deux milieux. On se propose de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission. Pour cela on considère une tige infinie de section constante σ constituée de deux milieux homogènes de caractéristiques respectives (ρ_1, E_1) et (ρ_2, E_2). L'interface entre les deux milieux est située en $x = 0$. On note $c_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}}$ et $c_2 = \sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ les vitesses des ondes respectives dans les deux milieux.

Les équations considérées sont les suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pour } x < 0 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pour } x > 0 \\
[u] &= 0 \quad \text{pour } x = 0 \\
\left[E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= 0 \quad \text{pour } x = 0\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Question 17 *Interpréter les deux dernières équations du système (8).*

On travaille en régime harmonique et on cherche le déplacement u sous la forme

$$u(x,t) = Re(\phi(x) e^{-i\omega t})\,. \tag{9}$$

Le calcul des modes propres revient à chercher, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, les solutions ϕ bornées en espace.

Question 18 *Remplacer $u(x,t)$ par son expression donnée par (9) dans le système (8). En déduire un système d'équations vérifiées par ϕ.*

Question 19 *Résoudre le système établi à la question 18. Montrer que ϕ est de la forme*

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= A_1^- e^{-ik_1 x} + A_1^+ e^{ik_1 x} \quad \textit{pour } x < 0 \\
\phi(x) &= A_2^- e^{-ik_2 x} + A_2^+ e^{ik_2 x} \quad \textit{pour } x > 0\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Que valent k_1 et k_2? Montrer que les deux relations suivantes doivent être vérifiées

$$\begin{aligned}
A_1^- + A_1^+ &= A_2^- + A_2^+ \\
E_1(-k_1 A_1^- + k_1 A_1^+) &= E_2(-k_2 A_2^- + k_2 A_2^+)\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

On pose $\gamma = \dfrac{k_2 E_2}{k_1 E_1}$.

Question 20 *Exprimer γ en fonction des masses volumiques et des vitesses des ondes.*

Les équations (11) constituent un système de 2 équations à 4 inconnus. On fixe 2 inconnus et on résout le système 2×2 ainsi obtenu. On choisit de poser $A_1^+ = 1$ et $A_2^- = 0$.

Question 21 *Déterminer le coefficient de réflexion $R = \dfrac{A_1^-}{A_1^+}$ et le coefficient de transmission $T = \dfrac{A_2^+}{A_1^+}$ en fonction de γ.*

Question 22 *Que se passe-t-il pour $\gamma = 1$?*

8.2 Un schéma global

On travaille avec le schéma obtenu à la question 10.

8.2.1 Construction du schéma

Question 23 *Récrire ce schéma dans le cas particulier de la tige constituée des deux matériaux homogènes.*

Question 24 *En utilisant les résultats obtenus en termes de stabilité et de dispersion numérique dans le cas d'une tige homogène, proposer un choix pour le pas de temps Δt. Remarquons qu'on préfèrera un schéma dispersif plutôt qu'un schéma instable.*

8.2.2 Implémentation et application numérique

Question 25 *Coder le schéma en déplacement construit à la question 23. Valider le schéma dans le cas particulier d'un milieu homogène, ie $\rho_1 = \rho_2$ et $E_1 = E_2$.*

Question 26 (Application numérique) *On prendra les valeurs numériques suivantes :*

- $N = 1000$;
- $\sigma = 0.0001\, m^{-2}$;
- $h = 0.001\, m$;
- $L_1 = 700 * h\, m$;
- $\rho_1 = 7700\, kg/m^3$;
- $c_1 = 5900\, m/s$;
- $\rho_2 = 7700\, kg/m^3$;
- $c_2 = 2950\, m/s$;
- $$u_0(ih) = u_1(ih) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(i-500)^2}{2*2^2}\right) & si\ -10 \le i - 500 \le 10 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Tracer le déplacement pour différents temps $n\Delta t$ (par exemple $n = 100$, $n = 200$ ....). Décrire la solution. Que se passe-t-il à l'interface ?

8.3 Un couplage de schéma

Pour éviter les phénomènes de dispersion numérique et d'instabilité, nous imposons la condition $c\dfrac{\Delta t}{h} = 1$ dans les 2 domaines. Pour cela, on choisit des pas d'espace différents (h_1 et h_2) et le même pas de temps Δt. On résout séparemment les équations dans les deux milieux et on raccorde ces derniers en imposant des conditions de transmission.

8.3.1 Les équations sous forme forte

On considère les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\rho_1 \sigma \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega_1\,, \\
\rho_2 \sigma \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega_2\,, \\
T_1 &= E_1 \sigma \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega_1\,, \\
T_2 &= E_2 \sigma \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega_2\,. && (12) \\
& && (13)
\end{aligned}$$

Les conditions de transmission à l'interface sont

$$\begin{aligned}
u_2(L_1) &= u_1(L_1)\,. \\
T_2(L_1) &= T_1(L_1)\,. && (14)
\end{aligned}$$

On pose $\lambda = T_2(L_1) = T_1(L_1)$. λ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange.

Les conditions aux limites sont des conditions d'encastrement

$$u_1(0) = u_2(L) = 0\,. \tag{15}$$

On munit enfin notre système d'équations d'une condition initiale

$$\begin{aligned}
u_1(.,t=0) &= u_0 \quad \text{dans } \Omega_1\,, \\
u_2(.,t=0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2\,, \\
\frac{\partial u_1}{\partial t}(.,t=0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1\,, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t}(.,t=0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2\,. && (16)
\end{aligned}$$

On introduit les espaces suivants

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left\{ v_1 \in H^1(\Omega_1) \,/\, v_1(0) = 0 \right\} \\
X_2 &= \left\{ v_2 \in H^1(\Omega_2) \,/\, v_2(L) = 0 \right\}\,.
\end{aligned}$$

Les équations (12) complétées par les conditions de transmission (14), la condition aux limites (15) et la condition initiale (16) constituent notre problème noté $\mathcal{P}_c$. On peut montrer que pour $u_0 \in X_1$, notre problème admet une unique solution

$$(u_1, u_2, T_1, T_2) \in (\mathcal{C}^0(0,T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)) \cap \mathcal{C}^1(0,T; X_1 \times X_2)) \times \mathcal{C}^0(0,T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))\,.$$

8.3.2 Les équations sous forme faible

Question 27 *Etablir la formulation variationnelle suivante :*
Trouver $(u_1, u_2, T_1, T_2, \lambda) \in$

$$(\mathcal{C}^0(0,T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)) \cap \mathcal{C}^1(0,T; X_1 \times X_2)) \times \mathcal{C}^0(0,T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times \mathbb{R})$$

tel que

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt^2}\displaystyle\int_{\Omega_1} \rho_1\sigma u_1 v_1 + \int_{\Omega_1} T_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \lambda v_1(L_1) & = & 0 \quad \forall v_1 \in X_1 \\
\dfrac{d}{dt^2}\displaystyle\int_{\Omega_2} \rho_2\sigma u_2 v_2 + \int_{\Omega_2} T_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \lambda v_2(L_1) & = & 0 \quad \forall v_2 \in X_2 \\
\displaystyle\int_{\Omega_1} \frac{1}{E_1\sigma} T_1\tau_1 - \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}\tau_1 & = & 0 \quad \forall \tau_1 \in L^2(\Omega_1) \\
\displaystyle\int_{\Omega_2} \frac{1}{E_2\sigma} T_2\tau_2 - \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\tau_2 & = & 0 \quad \forall \tau_2 \in L^2(\Omega_2) \\
(u_1(L_1) - u_2(L_1))\mu & = & 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}\,.
\end{array}
\tag{17}
$$

On admet que la formulation variationnelle précédente admet une solution et une seule.

8.3.3 Discrétisation en espace et en temps

Question 28 *Discrétiser en espace*[1] *et en temps la formulation variationnelle précédente en suivant la même démarche que pour le schéma "global". Remarquons qu'il faut utiliser des demi-fonctions de base pour la discrétisation des espaces X_1 et X_2 au niveau de l'interface $x = L_1$.*

Montrer qu'on obtient le schéma suivant

$$
\begin{array}{rcl}
M_{U1}\dfrac{U_1^{n+1} - 2U_1^n + U_1^{n-1}}{\Delta t^2} + K_1 T_1^n - C_1\Lambda^n & = & 0 \\
M_{U2}\dfrac{U_2^{n+1} - 2U_2^n + U_2^{n-1}}{\Delta t^2} + K_2 T_2^n + C_2\Lambda^n & = & 0 \\
M_{T1}T_1^n - K_1^T U_1^n & = & 0 \\
M_{T2}T_2^n - K_2^T U_2^n & = & 0 \\
C_1^T U_1^n - C_2^T U_2^n & = & 0\,.
\end{array}
\tag{18}
$$

Question 29 *Déterminer les coefficients des matrices M_{U_1}, M_{U_2}, M_{T1}, M_{T2}, K_1 et K_2 et des vecteurs C_1 et C_2 en utilisant la condensation de masse.*

8.3.4 Résolution

Question 30 *Montrer que Λ^n est donné par*

$$
\Lambda^n = (C_1^T M_{U1}^{-1} C_1 + C_2^T M_{U2}^{-1} C_2)^{-1} (C_1^T M_{U1}^{-1} K_1 T_1 - C_2^T M_{U2}^{-1} K_2 T_2)\,.
$$

Donner une expression simple[2] *de Λ^n en utilisant l'expression des coefficients des matrices.*

Question 31 *On suppose U_1^{n-1}, U_1^n, U_2^{n-1} et U_2^n connus. Donner les étapes pour déterminer U_1^{n+1} et U_2^{n+1}.*

Question 32 *Ecrire les schémas en déplacements vérifiés par U_1^n et U_2^n (on élimine T_1 et T_2). On exprimera $(U_1^{n+1})_i$ en fonction de Λ^n, de $(U_1^{n-1})_i$, $(U_1^n)_{i+1}$ et $(U_1^n)_{i-1}$. On procèdera de même pour $(U_2^{n+1})_i$.*

1. les pas d'espace h_1 et h_2 sont différents
2. au sens peu coûteux en calcul

8.3.5 Implémentation et résultats numériques

Question 33 *Implémenter la résolution du schéma construit à la question 32 et valider les résultats avec le cas homogène en travaillant avec deux matériaux identiques.*

Question 34 *On s'intéresse à trois configurations différentes. Les données communes à ces trois configurations sont :*

- $L = 1\,m$;
- $L_1 = 0.7\,m$;
- $h_1 = 0.001\,m$;
- $\rho_1 = 7700\,kg/m^3$;
- $c_1 = 5900\,m/s$;
- $\Delta t = h_1/c_1$:
-
$$u_0(ih_1) = u_1(ih_1) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(i-500)^2}{2*2^2}\right) & si\ \ -10 \leq i - 500 \leq 10 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Les trois configurations sont :

1. $\rho_2 = \rho_1$, $c_2 = c_1/2$. *On choisit alors* $h_2 = h_1/2$;
2. $\rho_2 = \rho_1$, $c_2 = 2\,c_1$. *On choisit alors* $h_2 = 2\,h_1$;
3. $\rho_2 = 2\,\rho_1$, $c_2 = c_1/2$. *On choisit alors* $h_2 = h_1/2$.

Tracer le déplacement pour différents temps $n\Delta t$ *(par exemple* $n = 100$, $n = 200$ *....). On prendra en compte que les pas d'espace sont différents. Mesurer les coefficients de réflexion et de transmission et les comparer avec les coefficients de réflexion et de transmission théoriques.*