Méthode d'éléments finis discontinus appliquée à un problème de convection-diffusion

Responsable : Houssem Haddar

houssem.Haddar@inria.fr

Introduction

Dans ce projet, on propose d'explorer une nouvelle méthode d'éléments finis fondées sur des fonctions de bases discontinues. Bien évidemment, on n'aura plus un espace d'approximation inclus dans $H^1(\Omega)$ ce qui va nécessiter une adaptation de l'approche. Ce type d'approximation doit permettre de mieux traiter les termes de convection dans une équation de convection-diffusion en particulier lorsque la diffusion est peu importante. C'est ce que nous allons essayer d'observer dans ce projet.

On considère par la suite le problème modèle suivant dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,\kappa\nabla u + \lambda u + V\cdot\nabla u = f & \text{dans } \Omega \\ \kappa\dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où κ, λ et V sont des fonctions de x, y. V représente la vitesse de convection. On supposera par la suite que λ, $\kappa, V \in L^\infty(\Omega)$ et que $\kappa > 0$. On supposera également que $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

La formulation usuelle dans $H^1(\Omega)$ est :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \kappa\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega \lambda u\,v\,dx + \int_\Omega (V\cdot\nabla u)\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,v\,d\sigma \end{array}\right. \tag{2}$$

Question 1

Montrer que sous les conditions suivantes ($V_\infty = \sup(|V_x|, |V_y|)$, $k_\infty = \sup k$) : $V_\infty \leq \sqrt{2\kappa_\infty\lambda}$ et $\lambda > 0$ le problème (2) est bien posé.

On admettra, par la suite que la solution du problème $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Méthode des éléments finis discontinus

Formulation discontinue

Il existe plusieurs variantes de la méthodes des éléments finis discontinus. Nous présentons ici la plus simple. La méthode repose sur une formulation variationnelle discontinue que l'on obtient à partir de l'équations de conservation écrite sur un élément E donné pour $u \in H^2(E)$, $\forall v \in H^1(E)$:

$$\int_E \kappa\nabla u\cdot\nabla v + \int_E \lambda uv - \int_{\partial E}\kappa\frac{\partial u}{\partial n}v + \int_E (V\cdot\nabla u)\,v = \int_E fv.$$

Si on suppose que $\Omega = \bigcup_{\ell=1,L} E_\ell$, on a en sommant ces relations sur tous les éléments :

$$\sum_{\ell=1,L}\left(\int_{E_\ell}\kappa\nabla u\cdot\nabla v + \int_{E_\ell}\lambda uv + \int_{E_\ell} V\cdot\nabla u\,v\right) - \sum_{k=1,K}\int_{F_k}\left[\kappa\frac{\partial u}{\partial n_k}v\right] = \sum_{\ell=1,L}\int_{E_\ell} fv + \sum_{s=1,S}\int_{B_s} gv$$

où on a noté F_k les faces internes des éléments, B_s les faces des éléments situés au bord, n_k un vecteur unitaire normal à la face F_k et $[w]$ le saut de w à travers F_k défini par

$$[w]\,(x) = \lim_{\epsilon \to 0} w(x + \epsilon n_k) - w(x - \epsilon n_k) \quad \text{pour } x \in F_k.$$

Question 2

On introduit la notation :

$$\{w\} = \frac{1}{2}\left(w_{|E_p} + w_{|E_q}\right)_{|F_k} \quad \textit{avec } E_p \cap E_q = F_k.$$

Montrer que $\forall u, v$:

$$\int_{F_k} \left[\kappa \frac{\partial u}{\partial n_k} v\right] = \int_{F_k} \left\{\kappa \frac{\partial u}{\partial n_k}\right\} [v] + \int_{F_k} \left[\kappa \frac{\partial u}{\partial n_k}\right] \{v\}$$

Lorsque u *est solution de (2) montrer que* :

$$\sum_{\ell=1,L} \left(\int_{E_\ell} \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \int_{E_\ell} \lambda u v + \int_{E_\ell} V \cdot \nabla u\, v \right) - \sum_{k=1,K} \int_{F_k} \left\{\kappa \frac{\partial u}{\partial n_k}\right\} [v] = \sum_{\ell=1,L} \int_{E_\ell} f v + \sum_{s=1,S} \int_{B_s} g v.$$

On pose :

$$\begin{aligned}
a(u,v) \;&\underset{def}{=} \sum_{\ell=1,L} \left(\int_{E_\ell} \kappa \nabla u . \nabla v + \int_{E_\ell} \lambda u v + \int_{E_\ell} V \cdot \nabla u\, v \right) \\
&\quad - \sum_{k=1,K} \int_{F_k} \left\{\kappa \frac{\partial u}{\partial n_k}\right\} [v] + \sum_{k=1,K} \int_{F_k} \left\{\kappa \frac{\partial v}{\partial n_k}\right\} [u] \\
l(v) \;&\underset{def}{=} \sum_{\ell=1,L} \int_{E_\ell} f v + \sum_{s=1,S} \int_{B_s} g\, v.
\end{aligned}$$

et on introduit l'espace de Hilbert :

$$H^2(\mathcal{E}) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \; v_{|E_\ell} \in H^2(E_\ell) \; \forall \ell \right\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|^2 = \sum_{\ell} \|v\|^2_{H^2(E_\ell)}.$$

Dans cette espace, on considère alors la formulation variationnelle :

$$\left| \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in H^2(\mathcal{E}) \text{ tel que } \forall v \in H^2(\mathcal{E}) \\ a(u,v) = l(v). \end{array} \right. \tag{3}$$

Question 3

Montrer que si u *est solution de (2) alors* u *est une solution (3). Réciproquement, montrer que si (3) a une solution* $u \in H^1(\Omega)$ *alors* u *est solution de (2).*

Approximation P1

Il s'agit maintenant de proposer une approximation interne de l'espace $H^2(\mathcal{E})$. On se propose ici d'utiliser des éléments finis d'ordre 1 que l'on pourrait facilement généraliser à un ordre supérieur. On introduit l' espace d'approximation suivant :

$$V_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \; v_{|E_\ell} \in P^1\left[E_\ell\right] \; \forall \ell \right\}$$

ainsi que le problème discret :

$$\left| \begin{array}{c} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v \in V_h \\ a(u_h, v) = l(v). \end{array} \right. . \tag{4}$$

Noter que par rapport aux éléments finis de Lagrange usuels, V_h n'est pas un sous-espace de $H^1(\Omega)$!

On supposera par la suite que $(E_\ell)_{l=1,L}$ constitue une triangulation admissible du domaine Ω. On introduit des fonctions de base locales de $P^1[E_\ell]$ (à support dans E_ℓ) :

$$\left(\tau_\ell^i\right)_{i=1,3}.$$

Question 4

Montrer que $\left(\left(\tau_\ell^i\right)_{i=1,3}\right)_{\ell=1,L}$ *forment une base de* V_h *et que* $V_h \subset H^2(\mathcal{E})$. *Montrer que* $a(v,v) = 0$ *dans* V_h *implique* $v = 0$ *et en déduire que le problème (4) admet une unique solution notée* u_h *par la suite.*

Question 5

On note $U = \left(\left(u_n^j\right)_{i=1,3}\right)_{n=1,L}$ *les composantes de* u_h *sur la base* $\left(\left(\tau_n^j\right)_{i=1,3}\right)_{n=1,L}$. *Donner une interprétation de* u_n^j *et montrer que* U *est solution du système linéaire*

$$(\mathbb{K} + \mathbb{M} + \mathbb{T} + \mathbb{C})\, U = B$$

avec :

$$\left|\begin{array}{l}
\mathbb{K}_{mn}^{ij} = \displaystyle\sum_{\ell=1,L}\left(\int_{E_\ell} \kappa \nabla \tau_n^j \cdot \nabla \tau_m^i\right) \\
\mathbb{M}_{mn}^{ij} = \displaystyle\sum_{\ell=1,L}\left(\int_{E_\ell} \lambda \tau_n^j\, \tau_m^i\right) \\
\mathbb{T}_{mn}^{ij} = \displaystyle\int_{E_m} (V \cdot \nabla \tau_n^j)\, \tau_m^i \\
\mathbb{C}_{mn}^{ij} = -\displaystyle\sum_{k=1,K}\int_{F_k}\left\{\kappa \frac{\partial \tau_n^j}{\partial n_k}\right\}\left[\tau_m^i\right] + \sum_{k=1,K}\int_{F_k}\left\{\kappa \frac{\partial \tau_m^i}{\partial n_k}\right\}\left[\tau_n^j\right] \\
B_n^i = \displaystyle\sum_{\ell=1,L}\int_{E_\ell} f\, \tau_m^i + \sum_{s=1,S}\int_{B_s} g\, \tau_m^i
\end{array}\right. .$$

Question 6

Montrer que les matrices $\mathbb{K}$ *et* $\mathbb{M}$ *sont des matrices symétriques bloc diagonales, que* $\mathbb{T}$ *est une matrice diagonale parc bloc et que la matrice* $\mathbb{C}$ *est une matrice antisymétrique qui présente une structure creuse par bloc.*

Estimations d'erreurs

Si u est solution de (2) et appartient à $H^2(\mathcal{E})$, alors on a l'estimation d'erreur suivante sur la solution approchée u_h :

$$\|u - u_h\|_1 \leq h\, \|u\|_2$$

la norme $\|\|_1$ étant donnée par

$$\|v\|_1^2 = \sum_\ell \|v\|_{1,E_\ell}^2 .$$

Mise en oeuvre

Le calcul des matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{T}$ est immédiat puisqu'il s'agit du calcul standard des matrices élémentaires d'éléments finis. Par contre, le calcul de la matrice $\mathbb{C}$ est un peu plus délicat puisqu'il nécessite la connaissance des éléments voisins d'un élément donné. Il faudra donc disposer d'une structure décrivant les arêtes. Nous allons détailler ces calculs dans le cas où on choisit les fonctions de bases locales standard des éléments finis, c'est-à-dire telles que :

$$\tau_\ell^i(M_\ell^j) = \delta_{ij}. \qquad (M_\ell^j \text{ sommet de } E_\ell)$$

Question 7

Montrer que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{K}_{mn}^{ij} = \left(\int_{E_m} \kappa \nabla \tau_n^j . \nabla \tau_m^i\right) \delta_{mn} \\ \mathbb{M}_{mn}^{ij} = \left(\int_{E_m} \lambda \tau_n^j \, \tau_m^i\right) \delta_{mn} \\ \mathbb{T}_{mn}^{ij} = \left(\int_{E_m} V \cdot \nabla \tau_n^j \tau_m^i\right) \delta_{mn} \end{array} \right.$$

Calcul de la matrice d'interface

Commençons par manipuler quelque peu l'expression du coefficient $\mathbb{C}_{mn}^{ij}$. Soient $p \neq q$ tels que $E_p \cap E_q = F_k$ et n_k la normale de F_k sortante de l'élément E_p. On a :

$$\int_{F_k} \left\{ \kappa \frac{\partial \tau_n^j}{\partial n_k} \right\} \left[\tau_m^i\right] = \frac{1}{2} \int_{F_k} \left(\kappa_p \partial_{n_k} \tau_n^j \delta_{np} + \kappa_q \partial_{n_q} \tau_n^j \delta_{nq}\right) \left(\tau_m^i \delta_{mp} - \tau_m^i \delta_{mq}\right).$$

Ce terme est nul si $n \neq p$ et si $n \neq q$. Pour fixer les idées, supposons que $n = p$, on a alors nécessairement $q \neq n$ et :

$$\int_{F_k} \left\{ \kappa \frac{\partial \tau_n^j}{\partial n_k} \right\} \left[\tau_m^i\right] = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \int_{F_k} \kappa_p \partial_{n_k} \tau_p^j \tau_p^i & \text{si } m = p \\ -\frac{1}{2} \int_{F_k} \kappa_p \partial_{n_k} \tau_p^j \tau_q^i & \text{si } m = q \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

En introduisant $n_p^k = n_k$ et $n_q^k = -n_k$, ces formules s'écrivent encore :

$$\int_{F_k} \left\{ \kappa \frac{\partial \tau_n^j}{\partial n_k} \right\} \left[\tau_m^i\right] = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \int_{F_k} \kappa_p \partial_{n_p^k} \tau_p^j \tau_p^i & \text{si } m = p \\ \frac{1}{2} \int_{F_k} \kappa_p \partial_{n_q^k} \tau_p^j \tau_q^i & \text{si } m = q \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

On en déduit que (F_n^k la $k^{ème}$ face de E_n) :

$$\sum_{k=1,K} \int_{F_k} \left\{ \kappa \frac{\partial \tau_n^j}{\partial n_k} \right\} \left[\tau_m^i\right] = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \sum_{k=1,3} \int_{F_n^k} \kappa_n \partial_{n_n^k} \tau_n^j \tau_n^i & \text{si } m = n \\ -\frac{1}{2} \int_{F_k^n} \kappa_n \partial_{n_n^k} \tau_n^j \tau_m^i & \text{si } m \neq n \text{ et } F_k = E_n \cap E_m \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Ce calcul conduit à l'algorithme d'assemblage suivant :

· boucle sur les éléments $\ell = 1, L$
· boucles sur les faces internes $k = 1, K$
- Calcul des coefficients $C_{\ell\ell}^{ij} = \frac{1}{2} \int_{F_\ell^k} \kappa_\ell \partial_{n_\ell^k} \tau_\ell^j \tau_\ell^i, \forall i, j$
- Assemblage $\mathbb{C}_{\ell\ell}^{ij} = \mathbb{C}_{\ell\ell}^{ij} - C_{\ell\ell}^{ij}$ et $\mathbb{C}_{\ell\ell}^{ji} = \mathbb{C}_{\ell\ell}^{ji} + C_{\ell\ell}^{ij}$
- Recherche de l'élément voisin m par la face interne F_n^k
- Calcul des coefficients $C_{\ell q}^{ij} = \frac{1}{2} \int_{F_\ell^k} \kappa_\ell \partial_{n_\ell^k} \tau_\ell^j \tau_q^i, \forall i, j$
- Assemblage $\mathbb{C}_{\ell q}^{ij} = \mathbb{C}_{\ell q}^{ij} + C_{k,\ell}^{ij}$ et $\mathbb{C}_{q\ell}^{ji} = \mathbb{C}_{q\ell}^{ji} - C_{\ell q}^{ij}$

Calculs élémentaires

Si on suppose que le coefficient κ est constant par élément (ou approché par une constante), le choix des élents finis P1 standard permet d'obtenir des formules explicites des termes élémentaires par face F_ℓ^k :

$$C_{\ell\ell}^{ij} = C_{\ell q}^{ij} = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2}\kappa_\ell \nabla\tau_\ell^j . n_\ell^k \left|F_\ell^k\right| & \text{si } M_\ell^i \in F_\ell^k \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Second membre

On approche le second membre B à l'aide de la technique d'interpolation suivante : les fonctions données f et g sont remplacées par leur interpolée discontinue sur l'espace d'approximation :

$$f_h = \sum_n \sum_{j=1,p_r} f(M_n^j)\tau_n^j \quad g_h = \sum_n \sum_{j=1,p_r/M_n^j\in\partial\Omega} g(M_n^j)\tau_n^j$$

conduisant ainsi à l'expression suivante de B :

$$B = \mathbb{M}F + \mathbb{M}_{\partial\Omega}G$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{M}_{mn}^{ij} = \int_{E_m} \tau_n^j \tau_m^i \delta_{mn} \\ (\mathbb{M}_{\partial\Omega})_{mn}^{ij} = \int_{\partial\Omega} \tau_n^j \tau_m^i \delta_{mn} \\ F_n^j = f(M_n^j) et G_n^j = g(M_n^j)\mathcal{I}_{M_n^j\in\partial\Omega} \end{array} \right. .$$

Calculs d'erreurs

On peut estimer des erreurs à l'aide des approximations suivantes :

$$\|u-u_h\|_{L^2} \simeq \|\Pi_h u - u_h\|_{L^2} = (\mathbb{M}(U-U_h), U-U_h)^{\frac{1}{2}}$$
$$|u-u_h|_{H^1} \simeq |\Pi_h u - u_h|_{H^1} = (\mathbb{K}(U-U_h), U-U_h)^{\frac{1}{2}}$$

où U représente le vecteur des composantes de la fonction interpolée $\Pi_h u$ et U_h le vecteur des composantes de la solution approchée u_h.

Programmation

- Afin de comparer cette méthode à une méthode d'éléments finis standard il est demandé de programmer également une méthode d'éléments finis standard.
- En ce qui concerne le maillage, on utilisera le mailleur EMC2.
- Afin de calculer les termes de la matrice $\mathbb{C}$ il est nécessaire de connaître des tables de voisinage afin de savoir pour une arete donnée quels sont les triangles ayant cette arête. Nous donnons en annexe une procédure de calcul qui détermine pour une arête I, J les deux triangles (ou le triangle dans le cas d'une arête de bord) possédant cette arête.
- Afin de visualiser des solutions discontinues on donne également en annexe une procédure de visualisation de telles solutions.

Expérimentation numérique

- On pourra valider les codes dans le cas où les paramètres du problème κ, λ et V sont supposés être constants. On pourra choisir une solution de la forme $u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$ sur $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.
- Il est demandé d'estimer numériquement la vitesse de convergence en norme L^2 et H^1 vis à vis du pas de maillage de la méthode des éléments finis standard et de la méthode des éléments finis continus pour différentes valeur de la vitesse de convection.
- On essaiera de mettre en évidence le fait que la méthode des éléments finis discontinus devient meilleure que la méthode des éléments finis standard lorsque la vitesse de convection devient grande.

Annexe

Calcul de voisinage

```
function [Voisin1,Voisin2]=voisinage(Nbre_noeuds,Num_sommet)

Nbre_triangles=size(Num_sommet,1);

Voisin1=sparse(Nbre_noeuds,Nbre_noeuds);
Voisin2=sparse(Nbre_noeuds,Nbre_noeuds);

%boucle triangle
for l=1:Nbre_triangles,

    for j=1:3,

        jp1=j+1;

        if (jp1==4) jp1=1;end,

           if (Num_sommet(l,j) > Num_sommet(l,jp1))
              I=Num_sommet(l,j);J=Num_sommet(l,jp1);
           else
              I=Num_sommet(l,jp1);J=Num_sommet(l,j);
           end

           if (Voisin1(I,J)==0) Voisin1(I,J)=l; else Voisin2(I,J)=l; end

    end

end
```

Procédure d'affichage des résultats

```
function dessine_dis(U,Coor_noeud,Num_sommet)

Nbre_triangles=size(Num_sommet,1);Nbre_noeuds=size(Coor_noeud,1);

m=min(U);  M=max(U);

U=(U-m)/(M-m);

figure;

%boucle triangle
for l=1:Nbre_triangles

    X=[Coor_noeud(Num_sommet(l,1),1) Coor_noeud(Num_sommet(l,2),1) Coor_noeud(Num_sommet(l,3),1)];
    Y=[Coor_noeud(Num_sommet(l,1),2) Coor_noeud(Num_sommet(l,2),2) Coor_noeud(Num_sommet(l,3),2)];
    Z=[U(3*(l-1)+1) U(3*(l-1)+2) U(3*(l-1)+3)];

    patch(X,Y,Z,Z,'FaceColor','interp');

end
```