

Une technique de migration en géophysique

Houssem HADDAR

Houssem.Haddar@inria.fr

Mots clés : Équation des ondes, approximation paraxiale, éléments finis, “splitting”.

1 Présentation du problème

Dans de nombreux problèmes physiques, en particulier en géophysique pétrolière et en sismique, les ondes se propagent dans une direction privilégiée z , la profondeur. Tant que la direction de propagation des ondes n’est pas trop éloignée de cette direction, on peut alors approcher l’équation des ondes par une équation d’évolution en z appelé équation paraxiale. L’avantage de cette équation est qu’elle admet une approximation numérique rapide (objet du présent projet).

Notons Ω le domaine de \mathbb{R}^2 défini par :

$$\Omega = \{0 \leq x \leq x_M \text{ et } z \geq 0\}$$

On désigne par $\Gamma = \{x = 0\} \cup \{x = x_M\}$, la partie latérale de la frontière du domaine, et on pose $\gamma = [0, x_M]$ (voir figure 1).

On note u le champ de déplacement (scalaire) dans Ω et $w = \hat{u}$ la transformée de Fourier en temps de u . w est alors régi par l’équation paraxiale suivante, où on a besoin d’introduire une fonction auxiliaire ψ :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dz} + \frac{i\omega}{c}(w - \psi) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\omega^2}{c}\psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial}{\partial x} (\alpha\psi + bw) \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ w(x, z)|_{z=0} = w_0(x) & \text{(Condition initiale)} \\ w|_{\Gamma} = 0 \quad \psi|_{\Gamma} = 0 & \text{(C.L. de Dirichlet)} \end{cases}$$

$c(x, z)$ représente la vitesse de propagation dans le milieu, au point (x, z) et ω représente la pulsation de l’onde. α et b sont deux constantes positives fixées par l’angle d’incidence de l’onde. On utilise classiquement l’approximation paraxiale 45° qui correspond à $\alpha = 1/4$ et $b = 1/2$.

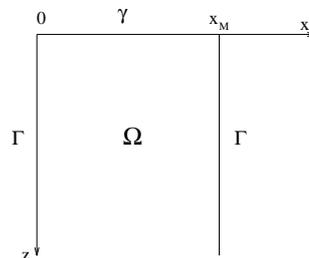


FIG. 1 – domaine d’étude

Nous allons donc nous intéresser à l'étude des solutions de (1) et à la résolution numérique de ce problème. Remarquer que les fonctions w et ψ sont à valeurs complexes.

A z fixé, on introduit les formes sesquilinéaires suivantes définies sur $H_0^1(\gamma) \times H_0^1(\gamma)$

$$\begin{aligned} m(\psi, \varphi) &= \int_{\gamma} \frac{1}{c(x, z)} \psi(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ a(\psi, \varphi) &= \int_{\gamma} c(x, z) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\varphi(x)}}{\partial x} dx \end{aligned}$$

et notera par (ψ, φ) le produit scalaire dans $L^2(\gamma)$.

Q 1.1 En utilisant ces notations, montrer qu'à z fixé, $w(\cdot, z)$ et $\psi(\cdot, z)$ sont dans $H_0^1(\gamma)$ et vérifient

$$(2) \quad \left(\frac{d}{dz} w(\cdot, z), \varphi \right) + i\omega m(w(\cdot, z) - \psi(\cdot, z), \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\gamma).$$

$$(3) \quad \omega^2 m(\psi(\cdot, z), \varphi) - a(\alpha\psi(\cdot, z) + bw(\cdot, z), \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\gamma).$$

Q 1.2 On note $T : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ qui à w associe $Tw = \psi$ solution de (3). Sous quelles conditions T est-il bijectif ?

Q 1.3 Ecrire à l'aide de T l'équation différentielle en z que vérifie $w(\cdot, z)$.

Pour $w_0 \in H_0^1$, on admettra l'existence d'une solution $w \in C^1(0, \infty; H_0^1(\gamma))$.

Q 1.4 Montrer que pour tout $z > 0$ on a la relation de conservation d'énergie suivante :

$$(4) \quad \int_{\gamma} |w(x, z)|^2 dx = \int_{\gamma} |w_0(x)|^2 dx$$

Indication : On pourra prendre $\varphi = w(\cdot, z)$ dans (2) et $\varphi = \alpha\psi(\cdot, z) + bw(\cdot, z)$ dans (3) et calculer la partie réelle de (2).

Dans la question suivante, on supposera que le milieu est homogène ($c=cte$). On s'intéresse à un cas particulier d'ondes se propageant dans tout le demi-espace $z > 0$ lorsque $\gamma = \mathbb{R}$: les ondes planes. Ce sont les ondes de la forme :

$$\begin{aligned} w(x, z) &= e^{-i(k_x x + k_z z)} \tilde{w} \\ \psi(x, z) &= e^{-i(k_x x + k_z z)} \tilde{\psi} \end{aligned}$$

où $\vec{k} = (k_x, k_z)^t$ s'appelle le vecteur d'onde. Sa direction $\vec{d} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ représente la direction de propagation de l'onde.

Q 1.5 Montrer que les ondes planes, solutions de l'équation paraxiale, vérifient la relation appelée relation de dispersion de la forme :

$$(5) \quad \frac{ck_z}{\omega} = F\left(\frac{ck_x}{\omega}\right).$$

Préciser la fonction F .

Cette relation de dispersion permet de déterminer les ondes planes qui se propagent dans une certaine direction de propagation. En effet, si on se fixe une direction de propagation \vec{d} et une pulsation ω alors la relation de dispersion devient une équation d'inconnu $|\vec{k}|$. Plus simplement, on peut se fixer k_x et ω et déterminer le vecteur d'onde correspondant.

Q 1.6 Tracer la courbe de dispersion, dans le plan (K_x, K_z) , définie par $K_z = F(K_x)$ pour $\alpha = 1/4$ et $b = 1/2$, où on a posé $K_x = \frac{ck_x}{\omega}$ et $K_z = \frac{ck_z}{\omega}$.

La relation de dispersion de l'équation des ondes s'exprime :

$$c |\vec{k}| = \omega$$

La courbe de dispersion ($K_x^2 + K_z^2 = 1$) est donc un cercle de rayon 1. La comparaison de la courbe de dispersion de l'équation paraxiale avec ce cercle donne une indication sur la validité de l'approximation. On vérifiera que l'approximation est exacte pour des ondes se propageant dans la direction z (i.e. pour $k_x = 0$).

2 Semi-discrétisation en x par éléments finis

On introduit une partition de γ formée de segments $[x_i, x_{i+1}]$ avec $x_i = ih = i\Delta x$ pour $i = 0, 1, \dots, N+1$ et $x_{N+1} = X_M$. On approche la formulation variationnelle (2-3) à l'aide d'éléments finis P^1 . On note $w_h(\cdot, z)$ et $\psi_h(\cdot, z)$ les solutions approchées et on pose (à z fixé)

$$W_h = [w_h(x_1), \dots, w_h(x_N)]^t \text{ et } \Psi_h = [\psi_h(x_1), \dots, \psi_h(x_N)]^t.$$

Q 2.1 Montrer que le problème approché peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$(6) \quad \begin{cases} U_h \frac{dW_h}{dz} + i\omega M_h (W_h - \Psi_h) & = 0 & (i) \\ \omega^2 M_h \Psi_h - A_h (\alpha \Psi_h + b W_h) & = 0 & (ii) \\ W_h(z=0) & = w_0. \end{cases}$$

où on précisera l'expression des matrices U_h , M_h et A_h , à l'aide des formes sesquilinéaires m et a .

On découpe l'axe des z à l'aide d'un pas constant Δz et on pose $z^n = n \Delta z$, $n \geq 0$. De plus, on suppose que $c(x, z)$ est constante par morceaux :

$$c(x, z) = c_i^n \quad \text{si} \quad x_i \leq x < x_{i+1} \quad \text{et} \quad z^n \leq z < z^{n+1}$$

Q 2.2 On se place en un point $z \in [z^n, z^{n+1}[$. Calculer les matrices U_h , M_h et A_h .

On introduit la formule de quadrature suivante :

$$(7) \quad \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Q 2.3 Montrer que les matrices U_h^* et M_h^* obtenues à l'aide de la formule de quadrature (7) vérifient $U_h^* = hI$ et M_h^* est une matrice diagonale. La matrice M_h^* ainsi obtenue s'appelle la matrice de masse condensée.

On remplace ainsi dans (6(i)) les matrices U_h et M_h par leurs approximations condensées et on s'intéresse dans toute la suite au schéma suivant :

$$(8) \quad \begin{cases} U_h^* \frac{dW_h}{dz} + i\omega M_h^* (W_h - \Psi_h) & = 0 & (i) \\ \omega^2 M_h \Psi_h - A_h (\alpha \Psi_h + bW_h) & = 0 & (ii) \\ W_h(0) & = w_0. \end{cases}$$

Q 2.4 On suppose dans cette question que le milieu est homogène. Que deviennent les matrices M_h et A_h .

2.1 Etude de la dispersion numérique (partie optionnelle)

De même que pour le problème continu, on s'intéresse aux ondes planes qui sont solutions du schéma semi-discrétisé. On se place donc dans le cadre de la question (2.4).

Q 2.5 Ecrire la relation de dispersion du schéma semi-discrétisé.

Indication : les ondes planes numériques sont des solutions particulières de la forme :

$$\begin{aligned} w_j(z) &= e^{-i(k_z z + j h k_x)} \tilde{w} \\ \psi_j(z) &= e^{-i(k_z z + j h k_x)} \tilde{\Psi} \end{aligned}$$

On montrera que la relation de dispersion s'écrit sous la forme :

$$(9) \quad \frac{ck_z}{\omega} = 1 - \frac{b\hat{A}_h}{\omega^2 \hat{M}_h - \alpha \hat{A}_h}$$

où \hat{A}_h et \hat{M}_h dépendent de k_x , h , et ω .

Notations :

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} &\equiv \text{longueur d'onde} \\ \zeta = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{\omega \Delta x}{c} ; \quad p = \frac{ck_x}{\omega} \end{aligned}$$

Q 2.6 Réécrire la relation de dispersion du schéma semi-discrétisé (9) en fonction des paramètres ζ et p sous la forme :

$$(10) \quad \left(\frac{ck_z}{\omega} \right)_{sd} = 1 - \frac{b\tilde{A}_h(\zeta, p)}{\tilde{M}_h(\zeta, p) - \alpha \tilde{A}_h(\zeta, p)}$$

Comparons la relation (10) avec la relation de dispersion de l'équation continue (5) qui s'écrivait :

$$\left(\frac{ck_z}{\omega} \right)_{cont} = F(p)$$

Pour cela, on se fixe des valeurs de p et on trace la courbe d'erreur :

$$e(\zeta) = \frac{p}{\left(\frac{ck_z}{\omega}\right)_{cont}} - \frac{p}{\left(\frac{ck_z}{\omega}\right)_{sd}}$$

en fonction de ζ , pour ζ variant dans $[0, \pi]$ (ce qui correspond à une discrétisation avec un nombre de points par longueur d'onde supérieur à 2).

3 Discrétisation totale

Q 3.1 De même que dans le cas continu, montrer que le schéma semi-discrétisé en x étudié dans la section précédente peut s'écrire, en éliminant Ψ_h , sous la forme :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dW_h}{dz} = iC_h W_h \\ W_h(0) = w_0 \end{cases}$$

où C_h est une matrice que l'on précisera.

Afin de résoudre ce système différentiel nous allons utiliser une méthode qui permet d'éviter le calcul explicite de C_h (qui nécessite le calcul de l'inverse d'une matrice). Cette méthode se base sur la décomposition de C_h en deux parties bien choisies et de ramener la résolution du système différentiel à la résolution de deux systèmes différentiels où chaque partie intervient séparément : c'est la méthode du splitting.

Présentation du splitting.

Soit u solution de l'équation différentielle suivante :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{du}{dz} = (A_1 + A_2)u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où A_1 et A_2 sont deux matrices constantes de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Q 3.2 Montrer que si A_1 et A_2 commutent, la solution de (3.2) à priori a pour expression :

$$(13) \quad u(z) = e^{A_1 z} e^{A_2 z} u_0 = e^{A_2 z} e^{A_1 z} u_0$$

Les méthodes de splitting reposent sur une décomposition de ce type. Introduisons alors l'algorithme correspondant : la première étape consiste à déterminer $u(\Delta z)$ à partir de u_0 .

Notation : On notera $u^0 = u(0)$; $u^1 = u(\Delta z)$... ; $u^n = u(n\Delta z)$.

Q 3.3 Vérifier que la solution u^1 peut s'obtenir à partir de deux fonctions intermédiaires v_1 et v_2 telles que :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dz} = A_1 v_1(z), & 0 \leq z \leq \Delta z \\ v_1(0) = u_0 = u^0 \\ \frac{dv_2}{dz} = A_2 v_2(z), & 0 \leq z \leq \Delta z \\ v_2(0) = v_1(\Delta z) \stackrel{d}{=} v^1 \end{cases}$$

$$u^1 = v_2(\Delta z) \stackrel{d}{=} v^2$$

Description de l'algorithme de splitting : Plus généralement, supposons qu'on ait déjà calculé la solution à l'étape n : $u^n \approx u(n\Delta z)$. La solution à l'étape n+1 s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = (A_1 + A_2)u & z^n \leq z \leq z^{n+1} \\ u(n\Delta z) = u^n \end{cases}$$

L'algorithme s'écrit alors comme précédemment :

- u^n donnée
- $v^0 = u^n$
- v^1 défini par : $v^1 = v_1(\Delta z)$ où v_1 est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dz} = A_1 v_1(z) & 0 \leq z \leq \Delta(z) \\ v_1(0) = v^0 = u^n \end{cases}$$

- v^2 défini par : $v^2 = v_2(\Delta z)$ où v_2 est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dv_2}{dz} = A_2 v_2(z) & 0 \leq z \leq \Delta(z) \\ v_2(0) = v^1 \end{cases}$$

- $u^{n+1} = v^2$

Q 3.4 Appliquer le résultat précédent à la solution W_h de (11) en milieu homogène. On explicitera tout d'abord la matrice C_h dans ce cas. Puis on la décomposera sous la forme :

$$C_h = C_h^1 + C_h^2 \text{ avec } C_h^1 = -\frac{\omega}{c} I$$

En supposant $W_h^n \approx W_h(n\Delta z) = W_h(z^n)$ connue, expliquer comment obtenir W_h^{n+1} , en introduisant deux valeurs intermédiaires V_h^1 et V_h^2 . Expliciter V_h^1 .

Montrer que le passage de W_h^n à W_h^{n+1} requiert la résolution d'un système de la forme :

$$(14) \quad \begin{cases} (\zeta^2 M_0 - \alpha A_0) \frac{dV_2}{dz} = \frac{i\omega}{C} b A_0 V_2 & 0 \leq z \leq \Delta z \\ V_2(0) = V_h^1 \end{cases}$$

Extension au cas hétérogène

On étend le procédé précédent au cas hétérogène de la façon suivante :

- W_h^n donnée
- (V_h^1) est déterminé par : $V_j^1 = e^{-\frac{i\omega \Delta z}{c_j^n}} W_j^n$
- $V_h^2 = V_2(\Delta z)$ où V_2 est solution de :

$$(15) \quad \begin{cases} (\omega^2 M_h - \alpha A_h) \Delta x (M_h^*)^{-1} \frac{dV_2}{dz} = i\omega b A_h V_2 \\ V_2(0) = V_h^1 \end{cases}$$

- $W_h^{n+1} = V_h^2$

Schéma d'ordre 2 en z

On se donne $\theta \geq \frac{1}{2}$ et on introduit le θ -schéma pour discrétiser l'équation (15) :

$$(\omega^2 M_h - \alpha A_h) \Delta x (M_h^*)^{-1} \frac{V_2(\Delta z) - V_2(0)}{\Delta z} = i\omega b A_h [\theta V_2(\Delta z) + (1 - \theta)V_2(0)]$$

Pour $\theta = \frac{1}{2}$, il s'agit du schéma de Crank-Nicolson. L'algorithme est alors le suivant :

- W_h^n connue.
- On stocke V_h^1 dans W_h^n :

$$W_j^n = e^{-i\omega \Delta z} c_j^n W_j^n$$

- Calcul de W_h^{n+1} :
- W_h^{n+1} solution de :

$$(16) \quad \begin{cases} \left[(\omega^2 \frac{\Delta x}{\Delta z} M_h (M_h^*)^{-1} - A_h (\alpha \frac{\Delta x}{\Delta z} (M_h^*)^{-1} + i\omega b \theta)) \right] W_h^{n+1} = \\ = \left[\omega^2 \frac{\Delta x}{\Delta z} M_h (M_h^*)^{-1} - A_h \left(\alpha \frac{\Delta x}{\Delta z} (M_h^*)^{-1} - i\omega b (1 - \theta) \right) \right] W_h^n \end{cases}$$

Q 3.5 *Ecrire un programme utilisant cet algorithme pour calculer la solution de l'équation paraxiale (lecture de données, construction des matrices, résolution...). Quelle est la structure des matrices à inverser ? On pourra utiliser cette structure dans le choix du stockage. On peut utiliser comme méthode de résolution une décomposition LU (cf. annexe).*

Remarque : pour tester le programme, on peut vérifier que l'énergie est bien conservée.

4 Simulations Numériques

- On pourra prendre $\alpha = 1/4$ et $b = 1/2$, correspondant à l'approximation paraxiale 45° .
- Condition initiale

$$w_0(x) = \frac{1}{|x - x_S|} \sin\left(\frac{\omega}{c}|x - x_S|\right)$$

On peut choisir $\Delta x = \Delta z$. La longueur d'onde est alors $\lambda = \frac{c}{F} = \frac{2\pi c}{\omega}$. Choisir un pas de discrétisation tel qu'on ait au moins 4 points par longueur d'onde ($\frac{\lambda}{\Delta x} \geq 4$). Les ordres de grandeur sont $c \approx 1000\text{m/s}$, $F \approx 10$ à 30 Hz ($\omega = 2\pi F$).

- **Premier cas : en milieu homogène.**

- Comment devient le signal si on augmente la fréquence ?
- Observer ce qui se passe en déplaçant le point source et en le rapprochant d'un des bords.
- Quelle est l'influence du paramètre θ ? (on pourra en particulier regarder l'énergie)

• **Deuxième cas : en milieu bicouche**

On suppose la vitesse constante dans 2 couches délimitées par une droite :

$$\begin{aligned} c(x, z) &= c_1 & \text{si } z < dx + f \\ c(x, z) &= c_2 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

Faire varier la pente de la droite pour différentes simulations.

• **Autres cas (en option)**

Lecture d'un fichier de vitesses hétérogène, milieu stratifié etc...

5 Annexe : factorisation LU d'une matrice tridiagonale

Soit A une matrice tridiagonale d'ordre N , inversible et dont l'expression est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N-1} & a_N \end{pmatrix}$$

où les a_i , $1 \leq i \leq N$ et les b_i , $1 \leq i \leq N - 1$, sont des nombres complexes. Alors on peut factoriser A sous la forme $A = LU$ où L et U sont données par

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & \alpha_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N-1} & \alpha_N \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les α_i et les u_i sont déterminés par :

$$\alpha_1 = a_1$$

Pour $i = 2, N$

$$u_{i-1} = \frac{b_{i-1}}{\alpha_{i-1}}$$

$$\alpha_i = a_i - b_{i-1} u_{i-1}$$

Fin i

La résolution du système linéaire $AX = F$ se ramène donc à la résolution de $LY = F$ (par une descente) puis $UX = Y$ (par une remontée). Cela nous conduit à l'algorithme de résolution suivant :

$$Y_1 = \frac{F_1}{\alpha_1}$$

Pour $i = 2, N$

$$Y_i = \frac{F_i - b_{i-1} Y_{i-1}}{\alpha_i}$$

Fin i

$$X_N = Y_N$$

Pour $i = N - 1, 1$

$$X_i = -u_i X_{i+1}$$

Fin i