Acoustique en écoulement

Responsable : Houssem Haddar

houssem.haddar@inria.fr

1 Introduction

On s'intéresse dans ce projet à la propagation d'une onde acoustique dans un milieu en écoulement. On supposera pour simplifier que l'écoulement est uniforme de vitesse V dirigé suivant x et est canalisé dans un tube infini Ω de hauteur h dans lequel se trouve également une plaque rigide Γ de longueur finie $2a$ et parallèle à l'écoulement.

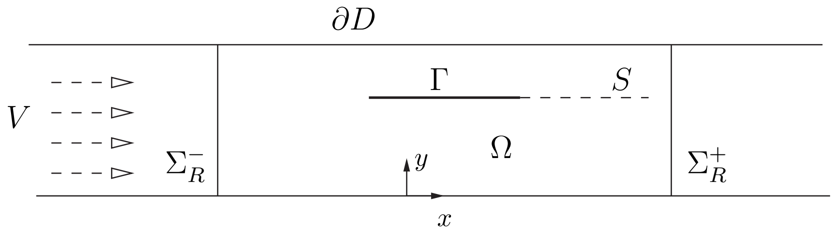

Fig. 1 – Description du modèle

Un modèle simplifié :

A partir des équations d'Euler linéarisées en vitesse-pression et en régime harmonique de pulsation ω, la pression acoustique $P(x,y,t) = \mathcal{R}(p(x,y)e^{i\omega t})$ s'obtient via la résolution des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_M(p) = (1-M^2)\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2ikM\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial D \cup \Gamma \end{array} \right. \tag{1}$$

où $M = \dfrac{V}{c}$ désigne le nombre de Mach (c vitesse de propagation du son dans le milieu au repos) et $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde. Afin de traduire la présence d'une onde incidente φ_i , solution particulière des équations précédentes dans le tube privée de la plaque rigide, on cherche la solution p sous la forme :

$$p = \varphi_i + p_d$$

où p_d correspond au champ de pression diffractée et vérifie donc les équations :

$$\begin{cases} H_M(p_d) = (1-M^2)\dfrac{\partial^2 p_d}{\partial x^2} + 2ikM\dfrac{\partial p_d}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 p_d}{\partial y^2} + k^2 p_d = 0 & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial p_d}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial D \\ \dfrac{\partial p_d}{\partial n} = -\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

En réalité, il se développe un sillage (discontinuité de la vitesse) à partir du bord de fuite de la plaque. Nous négligerons ici ce sillage.

2 Détermination de l'onde incidente et réduction en domaine borné

En l'absence de la plaque rigide on peut déterminer analytiquement des solutions à variables séparées des équations précédentes :

$$p_n(x,y) = a_n(x) b_n(y)$$

vérifiant :

$$H_M(p_n) = 0 \quad \text{dans }]-\infty,+\infty[\times]0,h[\tag{3}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial D \tag{4}$$

Question 1 :Montrer que $p_n,\ n \geqslant 0$ est de la forme :

$$p_n^{\pm}(x,y) = \gamma_n e^{i\beta_n^{\pm} x} \cos(\frac{n\pi y}{h}) \tag{5}$$

$$\text{avec } \beta_n^{\pm} = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 (1-M^2)}}{1-M^2}, \Re(\beta_n^{\pm}) \geqslant 0, \Im(\beta_n^{\pm}) \geqslant 0. \tag{6}$$

avec γ_n une constante.

On posera par la suite $c_n(y) = \gamma_n \cos(\frac{n\pi y}{h})$ et on choisira la constante γ_n de telle sorte que $\|c_n\|_{L^2(]0,h[)} = 1$. On admettra que la famille de fonctions $(c_n)_{n\geq 0}$ forme une base orthonormale de $L^2(]0,h[)$.
Lorsque $n \leqslant n_0 = E\left(\frac{kh}{\pi(1-M^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$ la constante $\beta_n^{\pm}$, appelée constante de propagation, est réelle et la fonction p_n est oscillante suivant la direction Ox. On appelle ces solutions particulières des ondes guidées. Par contre, lorsque $n > n_0$, la constante $\beta_n^{\pm}$ est imaginaire et on a affaire à des solutions ayant des comportements exponentiels à l'infini.
On notera que parmi les ondes guidées, p_n^+ correspond à une onde se propageant vers les $x > 0$ et p_n^- vers les $x < 0$, qui correspond au fait que les solutions transitoires sont cherchées sous la forme :

$$P(x,y,t) = \Re\left(e^{-i\omega t} p(x,y)\right).$$

On choisira, par la suite, une onde onde incidente de la forme $\varphi_i = p_m^+$.

Afin de pouvoir résoudre le problème initial par une méthode d'éléments finis, il faut se ramener à un problème posé en **domaine borné.** Nous allons voir comment la connaissance des solutions à variables séparées permet d'y arriver. D'un point de vue physique, la pression de diffraction correspond à une onde "produite" par le rayonnement de la plaque. Par conséquent, l'onde rayonnée étant physiquement bornée à l'infini, la pression de diffraction p_d ne se décompose que sur les fonctions $p_n^{\pm}$ en $\pm\infty$ respectivement.

Question 2 : Montrer que la solution p_d admet les décompositions suivantes à l'infini (R suffisamment grand) :

$$x > R \qquad p_d(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} (p_d, c_n)_{\Sigma_R^+}\, p_n^+(x,y) e^{-i\beta_n^+ R} \tag{7}$$

$$x < -R \quad p_d(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} (p_d, c_n)_{\Sigma_R^-}\, p_n^-(x,y) e^{i\beta_n^- R} \tag{8}$$

où on a posé : $(p_d, c_n)_{\Sigma_R^\pm} = \displaystyle\int_{\Sigma_R^-} p_d(\pm R, y) c_n(y) dy$ avec $\Sigma_R^\pm = \{x = \pm R\} \times]0, h[$.

En déduire que :

$$\frac{\partial p_d}{\partial n}_{|\Sigma_R^\pm} = -T_\pm p_d$$

en posant :

$$T_+ p_d = -\sum_{n\geqslant 0} i\beta_n^+ \,(p_d, c_n)_{\Sigma_R^+}\, c_n \quad \text{et} \quad T_- p_d = \sum_{n\geqslant 0} i\beta_n^- \,(p_d, c_n)_{\Sigma_R^-}\, c_n.$$

Ce qui conduit à introduire le problème en domaine borné :

$$H_M(p_d) = 0 \quad \text{dans } \Omega \cap \;]-R, +R[\times]0, h[\underset{\text{def}}{=} \Omega_R \tag{9}$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma \tag{10}$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial D \tag{11}$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} = -T_\pm p_d \quad \text{sur } \Sigma_R^\pm \tag{12}$$

Le problème (1) est alors équivalent au problème posé en **domaine borné** (L assez grand) :

$$H_M(p) = 0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_R \tag{13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cap \partial D \tag{14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_\pm p + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_\pm \varphi_i \quad \text{sur } \Sigma_R^\pm \tag{15}$$

Question 3 : Montrer que lorsque $\varphi_i = p_m^+$ on a :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_- \varphi_i = i\left(\beta_m^- - \beta_m^+\right) e^{-i\beta_m^+ R} c_m \quad \text{sur } \Sigma_R^-$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_+ \varphi_i = 0 \quad \text{sur } \Sigma_R^+.$$

Remarque : il est donc préférable de choisir $\varphi_i = e^{i\beta_m^+ R} p_m^+$ afin d'éviter de garder le terme exponentiel.

Question 4 : Montrer que ce problème a pour formulation variationnelle : $p \in H^1(\Omega_R)$ *telle que* $\forall \psi \in H^1(\Omega_R)$:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left((1-M^2)\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \bar\psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \bar\psi}{\partial y} - 2ikM\frac{\partial p}{\partial x}\bar\psi - k^2 p\bar\psi \right) \\
&+(1-M^2)\left(\int_{\Sigma_R^+} T^+(p)\bar\psi + \int_{\Sigma_R^-} T^-(p)\bar\psi \right) = \int_{\Sigma_R^-} g_i \bar\psi
\end{aligned}
\tag{16}
$$

où l'on précisera l'expression de g_i.

Question 5 : Etudier l'existence et unicité de solutions à ce problème variationnel : on considèrera dans un premier temps le cas simplifié $T^+ = T^- = 0$ *et on montrera que le problème relève de l'alternative de Freholm. On montrera ensuite que le résultat reste vrai dans le cas général.*

3 Mise en oeuvre

Afin de résoudre numériquement ce problème, on utilsera une méthode d'éléments finis P_1 sur un maillage réalisé à l'aide du logiciel EMC2 (ne pas oublier de déclarer Γ comme étant une fissure : on utilisera pour cela le bouton `FISSURE` (menu du haut) dans `EDIT_MESH` (menu de gauche)). On note, par la suite, $(w_I)_{I=1,N}$ les fonctions de base globales associées à ce mailage et $(T_\ell)_{\ell=1,M}$ l'ensemble des triangles du maillage.

Question 6 : Montrer que l'approximation par éléments finis conduit à un système linéaire de la forme :

$$
\left(\left(1-M^2\right)\mathbb{K}_x + \mathbb{K}_y - k^2\mathbb{M} - 2ikM\mathbb{D} + \left(1-M^2\right)\left(\mathbb{T}^+ + \mathbb{T}^-\right)\right) X = B \tag{17}
$$

où on donnera l'expression des différents termes.

Le calcul des matrices $\mathbb{K}_x$,$\mathbb{K}_y$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{D}$ est standard. Par contre, le calcul des matrices $\mathbb{T}^\pm$ ne l'est pas. En effet, les termes de ces matrices sont de la forme, pour $\mathbb{T}^+_{IJ}$ par exemple :

$$
\mathbb{T}^+_{IJ} = -\sum_{n\geq 0} i\beta_n^+ (w_I, c_n)(w_J, c_n)
$$

où

$$
(w_I, c_n) = \int_0^h w_I(L,y) c_n(y) dy
$$

On calculera ces termes de façon analytique car $c_n(y)$ est une fonction oscillante et tronquera la série après n_0 !

Question 7 : Ecrire un programme de résolution par éléments finis du problème variationnel (16).

Question 8 : Afin de tester les conditions aux limites sur $\Sigma_R^\pm$, *on pourra effectuer un test préliminaire, qui consiste à ne pas mettre la plaque. En effet, dans ce cas on doit retrouver l'onde guidée incidente.*