TD1 **Analyse Numérique et Optimisation** H. Haddar

Introduction aux EDP et aux différences finies

Exercice 1. Schémas d'Euler pour une EDO. Soit $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ une matrice symétrique positive. On considère l'équation différentielle

$$U'(t) = -AU(t) \tag{1}$$

avec $U(0) = U_0 \in \mathbb{R}^N$. On cherche à étudier les propriétés de deux schémas aux différences finis permettant de résoudre numériquement cette équation, c.à.d. de calculer une approximation U^n de $U(n\Delta t)$ où Δt désigne le pas de discrétisation en temps.

Le premier schéma, dit schéma explicite, s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = -AU^n, \tag{2}$$

et le deuxième schéma, dit schéma implicite, s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = -AU^{n+1}. \tag{3}$$

1.1 - Montrer que les deux schémas sont consistants d'ordre 1.

1.2 - Quelle est le schéma le plus rapide ?

1.3 - Montrer que la solution de (1) vérifie $\|U(t)\| \leq \|U_0\|$.

Un schéma d'approximation de l'équation (1) est dit inconditionnellement stable par rapport à A et Δt s'il existe une constante K telle que pour tout A et tout $\Delta t > 0$,

$$\|U^n\| \leq K\|U^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0. \tag{4}$$

1.4 - Les schémas (2) et (3) sont-ils inconditionnellement stables ?

1.5 - Montrer que le schéma explicite (2) est conditionnellement stable, c'est à dire que sous une certaine condition portant sur Δt et A, il existe une constante K telle que (4) soit vérifié.

1.6 - Montrer que les schémas (2) et (3) s'écrivent sous la forme $U^{n+1} = B(A, \Delta t)U^n$. Que signifie la stabilité pour la matrice $B(A, \Delta t)$?

1.7 - Déduire de la consistance et de la stabilité la convergence des deux schémas avec une vitesse de convergence d'ordre 1, c'est à dire que

$$\sup_{n\Delta t<T} |U^n - U(n\Delta t)| \leq C(T, U)\Delta t.$$

Exercice 2. Sur l'équation de la chaleur 1D. On s'intéresse à $u(x, t)$ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in]0, 1[, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = u(1, t) \ \text{ et } \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t). \end{cases} \tag{5}$$

2.1 - Calculer la solution explicite de (5) sous la forme d'un développement en série de Fourier. En déduire les estimations de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} \|u(., t)\|_{L^2} \ \leq \ \|u_0\|_{L^2} \ , & \forall\, t \geq 0, \\ ||u(., t)||_{L^\infty} \ \leq \ \sqrt{\frac{1+e^{-2(2\pi)^2 t}}{1-e^{-2(2\pi)^2 t}}} \ ||u_0||_{L^2} \ , & \forall\, t > 0. \end{cases}$$

2.2 - Expliquer, en procédant comme à la question précédente, pourquoi le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in]0, 1[, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = u(1, t) \ \text{ et } \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t), \end{cases} \tag{6}$$

est mal posé. Plus précisément, on montrera qu'on ne peut avoir aucune estimation du type :

$$\|u(., t)\|_{L^2} \leq C(t) \sum_{m=0}^{M} \|\frac{d^m u_0}{dx^m}\|_{L^2} \ .$$

où $C(t)$ serait indépendante de u_0.

2.3 - On revient à la solution du problème (5) que l'on souhaite approcher par différences finis. On pose $x_j = j\Delta x$, avec $\Delta x = 1/N$ et N désignant le nombre de points de discrétisation de de l'intervalle $[0,1]$, et on note par $u_j(t)$ une approximation de $u(x_j, t)$. Montrer que le schéma aux différences finis suivant, correpondant à la semi-discrétisation en espace de (5),

$$\begin{aligned} & u_j'(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{\Delta x^2} = 0, \quad 1 \le j \le N, \\ & u_j(0) = u_0(x_j), \\ & u_0(t) = u_N(t) \text{ et } u_{N+1}(t) = u_1(t), \end{aligned}$$

est consistant d'ordre 2 en espace. Montrer que la résolution de ce système est équivalente à la résolution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}^N$ de la forme $U'(t) = -AU(t)$. Donner l'expression de A.

2.4 - Calculer les valeurs propres de A (Indication : on cherchera des vecteurs propres de la forme $u_j = e^{i\omega x_j}$).

2.5 - En vous inspirant de l'Exercice 1, proposer deux schémas numériques permettant de résoudre le système d'équations de la question 2.3. Montrer que le schéma explicite est stable sous la condition $\Delta t \le \Delta x^2/2$.

Exercice 3. Principes du maximum discret et continu - Convergence $\mathbf{L}^\infty$.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. On considère u solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{7}$$

On admettra le résultat suivant :

$$f \in C^m(\bar{\Omega}) \Longrightarrow u \in C^{m+2}(\bar{\Omega}), \tag{8}$$

pour tout entier $m \ge 1$, avec l'estimation (la constante C dépendant de m) :

$$\|u\|_{C^{m+2}(\bar{\Omega})} \le C \, \|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} \,,$$

$(\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)| \,))$.

3.1 - En supposant que $f \in C^1(\bar{\Omega})$, démontrer le principe du maximum : pour tout $x \in \Omega$,

$$\min\,(0, \min_{y \,\in\, \bar{\Omega}} f(y)) \le u(x) \le \max\,(0, \max_{y \,\in\, \bar{\Omega}} f(y))$$

En déduire l'unicité de la solution.

3.2 - On suppose maintenant que Ω est le carré $]0,1[\times]0,1[$ auquel cas (8) reste vrai si on suppose f à support compact dans Ω. On considère un maillage uniforme de pas h de $\bar{\Omega}$, M_{ij} désignant le point de coordonnées (ih, jh) $\big(0 \le i,j \le N, h = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}^*\big)$.

On approche l'équation (7) par le schéma aux différences finies :

$$\left| \begin{aligned} & -\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} \\ & \qquad\qquad + u_{i,j} = f_{i,j}, \qquad \text{si } M_{i,j} \in \Omega, \\ & u_{i,j} = 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } M_{i,j} \in \Gamma, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

où $u_{i,j}$ désigne une approximation de $u(M_{i,j})$ et où $f_{i,j} = f(M_{i,j})$. Montrer que la recherche de la solution approchée équivaut à la résolution d'un système linéaire dont on précisera la matrice.

3.3 - Démontrer que si $u_{i,j}$ est solution de (9), alors :

$$\min\,(0, \min_{i,j} f_{i,j}) \le u_{i,j} \le \max\,(0, \max_{i,j} f_{i,j})$$

En déduire l'existence et l'unicité de la solution du schéma (9).

3.4 - Nous désignons par u_h la solution de (9) et posons :

$$\| \, u - u_h \, \|_\infty = \max_{i,j} | \, u(M_{i,j}) - u_{i,j} \, |$$

Dans le cas où $f \in C^2(\bar{\Omega})$, établir une estimation d'erreur pour $\| \; u - u_h \; \|_\infty$ en fonction de h et $\| \; f \; \|_{C^2(\bar{\Omega})}$.

3.5 - Généraliser les résultats des questions 3.2 à 3.3 à l'exemple suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x)\nabla u) + q(x)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{10}$$

où $a(x)$ et $q(x)$ désignent des fonctions régulières satisfaisant en outre :

$$\begin{cases} 0 < a_* \le a(x) \le a^* < +\infty & \forall x \in \bar{\Omega} \\ 0 < q_* \le q(x) \le q^* < +\infty & \forall x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

(On construira en particulier un schéma d'approximation par différences finies pour (10)).