**Equations d'évolution**

### Exercice 1. Condensation de masse

On considère la discrétisation de l'équation des ondes sur $\Omega = ]0,1[$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \\ u(0,x) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_t u(0,x) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

à l'aide du schéma numérique défini par $u^{n+1} \in V_h$ et

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{(\Delta t)^2}, v_h \right)_{L^2} + a_h(u_h^n, v_h) = 0$$

pour tout $v_h \in V_h$, où $V_h \subset H_0^1(]0,1[)$ est l'espace des éléments finis $P_1$ associé à un maillage uniforme ($h$ désignant la taille des mailles) et $a_h(u_h, v_h) = \int_0^1 u_h' v_h' dx$.

**1.1 -** On note $(\phi^i)$ la base (classique) de $V_h$ et $U_j^n \in \mathbb{R}^{n_{dl}}$ les coordonnées de $u_h^n$ dans cette base ($n_{dl}$ désigne le nombre de degrés de liberté de $V_h$). Exprimer $U^{n+1}$ en fonction de $U^n$ et $U^{n-1}$. On introduira à ce effet la matrice de masse $\mathcal{M}_h$ et la matrice de rigidité $\mathcal{K}_h$ définies par $(\mathcal{M}_h)_{i,j} = (\phi_i, \phi_j)_{L^2}$ et $(\mathcal{K}_h)_{i,j} = a_h(\phi_i, \phi_j)$.

**1.2 -** Déterminer explicitement les matrices $\mathcal{M}_h$ et $\mathcal{K}_h$. Quel est l'inconvénient majeur de cette méthode ?

**1.3 -** Montrer qu'une intégration numérique à l'aide de la formule des trapèzes diagonalise la matrice de masse $\mathcal{M}_h$ (on notera $\mathcal{N}_h$ la matrice ainsi obtenue). Montrer que le schéma numérique obtenu en remplaçant $\mathcal{M}_h$ par $\mathcal{N}_h$ est le même que le schéma différence finies (explicite centré) pour l'équation des ondes. Quel est l'avantage de ce schéma par rapport au précédent ?

### Exercice 2. Stabilité numérique par méthode d'énergie

On pose $\|v_h\|^2 = h \sum_j v_j^2$ pour tout profil numérique $v_h = (v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Le produit scalaire associé est noté $(v_h, w_h)$. On introduit également l'espace de Hilbert associé

$$V_h = \{ v_h \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \|v_h\| < +\infty \}.$$

On étudie l'approximation numérique de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

définie par

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{(\Delta t)^2}, v_h \right) + a_h(u_h^n, v_h) = 0$$

pour tout $v_h \in V_h$, où $a_h$ est la forme bilinéaire

$$a_h(u_h, v_h) = \frac{4h}{3} \sum_j \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \frac{v_{j+1} - v_j}{h} - \frac{h}{3} \sum_j \frac{u_{j+2} - u_j}{2h} \frac{v_{j+2} - v_j}{2h}.$$

pour $u_h, v_h \in V_h$.

**2.1 -** Quel est le schéma numérique différences finies équivalent ? Montrer que ce schéma est (au moins) d'ordre 2 en temps et 4 en espace.

**2.2 -** Montrer que la forme bilinéaire $a_h$ est telle que

$$a_h(u_h, u_h) \geq h \sum_j \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2,$$

pour tout $u_h \in V_h$.

**2.3 -** On définit l'énergie discrète

$$E_h^n = \frac{1}{2} \left\| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_h(u_h^{n+1}, u_h^n).$$

En utilisant une fonction test particulière à la formulation variationnelle vérifiée par $u_h^{n+1}$, montrer que $E_h^{n+1} = E_h^n$. Quel est l'équivalent continu de cette relation ?

**2.4 -** A partir de la décomposition

$$a_h(u_h^{n+1},u_h^n)=\frac{1}{4}a_h(u_h^{n+1}+u_h^n,u_h^{n+1}+u_h^n)$$
$$-\frac{1}{4}a_h(u_h^{n+1}-u_h^n,u_h^{n+1}-u_h^n),$$

montrer que le schéma est stable sous la condition CFL $2\Delta t/\sqrt{3}h\leq\delta<1$. On entend par stabilité que pour tout temps final $T$, il existe une constante $K$ indépendante de $h$ et $\Delta t$ telle que $\|u_n\|\leq K$.

**2.5 -** Le schéma numérique différence finie, explicite, centré en temps et en espace d'ordre 2 (en temps et en espace) en dimension 2 d'espace est obtenu en substituant $a_h$ par

$$\overline{a}_h(u_h,v_h)=h^2\sum_{i,j}\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h}$$
$$+h^2\sum_{i,j}\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h}\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h}.$$

Reprendre les questions 2.2-2.4 dans ce cas.

## Exercice 3. Solution régulière de l'équation des ondes

On considère l'équation des ondes dans un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ borné et régulier

$$\begin{cases}\partial_t^2u-\Delta u=0, & \text{dans } \Omega,\\ u(t,x)=0 & \text{sur } \partial\Omega\\ u(t=0)=u_0 & \\ \partial_t u(t=0)=u_1 & \end{cases}$$

avec $u_0\in H_0^1(\Omega)$ et $u_1\in L^2(\Omega)$.

**3.1 -** Rappeler brièvement comment on établit l'existence d'une unique solution

$$u\in\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))\cap\mathcal{C}^1([0,T];L^2(\Omega))$$

à cette équation.

**3.2 -** On suppose dorénavant que $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ et $u_1\in H_0^1(\Omega)$. Déterminer formellement le problème d'évolution dont $\partial_t u$ est solution. Montrer que ce problème admet une unique solution que l'on notera $v$.

**3.3 -** Montrer au moins formellement que $u\in\mathcal{C}^1([0,T];H_0^1(\Omega))\cap\mathcal{C}^2([0,T];L^2(\Omega))$.
*Remarque* : pour une démonstration rigoureuse, on pourra poser $\widetilde{u}=u_0+\int_0^t v(s)ds$ et prouver que $\widetilde{u}=u$.

## Exercice 4. Estimation d'énergie

Soit $\Omega$ un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $u$ la solution du problème d'évolution

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{dans } \Omega.\end{cases}$$

**4.1 -** En supposant que $u$ est régulière, montrer que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u(x,t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(x,s)|^2dx\,ds$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega u_0(x)^2dx+\int_0^t\int_\Omega f(x,s)u(x,s)\,dx\,ds.$$

**4.2 -** Soit $a\in\mathbb{R}^+$ et $g\in L^2(]0,T[)$ tel que $g\geq 0$. Montrer que, si $z(t)$ est continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$ et vérifie

$$z(t)\leq a+2\int_0^t g(s)\sqrt{z(s)}ds\quad\forall\, t\in[0,T],$$

alors

$$z(t)\leq\left(\sqrt{a}+\int_0^t g(s)ds\right)^2\quad\forall\, t\in[0,T].$$

**4.3 -** En déduire que, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\int_\Omega u(x,t)^2dx+2\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(x,s)|^2dx\,ds$$
$$\leq\left(\left(\int_\Omega u_0(x)^2dx\right)^{1/2}+\int_0^t ds\left(\int_\Omega f(x,s)^2dx\right)^{1/2}\right)^2.$$