Problèmes d'optimisation

Exercice 1. Projection sur un convexe fermé

Soit V un espace de Hilbert et K un convexe fermé non vide de V. Soit a un élément de V. On pose

$$d(a) = \operatorname{dist}(a, K) = \inf_{v \in K} |a - v|.$$

Soit u_n une suite d'éléments de K tels que $\lim |u_n - a| = d(a)$.

1.1 - En utilisant l'égalité de la médiane, montrer que u_n est une suite de Cauchy. En déduire qu'il existe un unique élément $p(a) \in K$ tel que $|p(a) - a| = d(a)$.

1.2 - Montrer que l'application $J(v) = |v - a|^2$ est fortement convexe. Comment en déduire la conclusion de la question précédente ?

Exercice 2. Problèmes variationnels

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

2.1 - (Laplacien) On considère la fonction J définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Montrer que J est fortement convexe sur $H^1(\Omega)$. Montrer que J admet un unique minimum $u \in H^1(\Omega)$. Montrer que u est la solution d'un problème variationnel à déterminer (Indication : on pourra considérer l'application $t \to J(u + tv)$).

2.2 - (Stokes) Montrer que la fonction

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\mu}{2} \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx$$

admet un minimum $\mathbf{u}$ de J sur l'ensemble des éléments de $H_0^1(\Omega)^N$ à divergence nulle. Montrer que $\mathbf{u}$ est solution d'un problème variationnel à déterminer. De quelle équation aux dérivées partielles $\mathbf{u}$ est-elle solution ?

Exercice 3. Centres asymptotiques

Soit E un espace de Hilbert de dimension finie, et x_k une suite bornée d'éléments de E.

3.1 - Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$, $f(y) = \limsup_k |y - x_k|^2$ est strictement convexe. En déduire que f admet un unique point de minimum $\bar{x}$. On appelle $\bar{x}$ le *centre asymptotique* de la suite x_k.

3.2 - Soit C l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des valeurs d'adhérence de x_k, et soit $\bar{y}$ la projection de $\bar{x}$ sur C. Montrer que

$$f(\bar{y}) + |\bar{x} - \bar{y}|^2 \leq f(\bar{x}) \ .$$

(Indication : développer $|x_k - \bar{y} + \bar{y} - \bar{x}|^2$.) Conclure que $\bar{x} \in C$.

Exercice 4. Minimisation dans les espaces de Banach uniformément convexes

On appelle *module de convexité* d'un espace de Banach X la fonction $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, définie par

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{1 - |(x+y)/2|;\ |x|, |y| \leq 1, |x - y| \geq \varepsilon\} \ .$$

Un Banach est *uniformément convexe* si $\delta(\varepsilon) > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$. Il sera parfois commode d'utiliser la version homogène suivante de la définition de δ :

$$\begin{aligned}(|a - x| \leq r,\ |a - y| \leq r,\ |x - y| \geq \varepsilon r)\\ \Rightarrow |a - (x+y)/2| \leq (1 - \delta(\varepsilon))r \ ,\end{aligned} \qquad (1)$$

pour tous $r > 0$ et $a \in X$.

4.1 - Montrer qu'un espace de Hilbert est uniformément convexe, et a pour module :

$$\delta(\varepsilon) = 1 - (1 - \varepsilon^2/4)^{1/2} > 0 \ .$$

Donner un exemple de Banach non uniformément convexe.

4.2 - Montrer que si C_n est une suite décroissante de convexes non vides fermés et bornés d'un Banach X uniformément convexe, alors l'intersection $\cap_n C_n$ est non-vide.
Indication : On s'inspirera de l'exercice 1, en particulier, on pourra considérer un élément $a \in X$ et la suite $u_n \in C_n$ telle que $\lim |u_n - a| = \lim_n \inf_{x \in C_n} |x - a|$.

4.3 - Soit V un Banach et $J : v \to \mathbb{R}$. On appelle ensemble de sous-niveau λ de J, $S_\lambda = J^{-1}(]-\infty; \lambda])$
a. Montrer que si J est convexe, pour tout λ, S_λ est convexe.
b. On rappelle qu'une fonction J est dite sci (semi-continue inférieurement) si et seulement si, pour toute suite convergente (x_n) on a

$$J(\lim x_n) \leq \lim_n \left(\inf_{p \geq n} J(u_p) \right) \quad (= \liminf J(x_n)).$$

Montrer que si J est sci, S_λ est fermé.
c. En déduire que toute fonction définie sur un Banach uniformément convexe atteint son minimum lorsqu'elle est convexe, sci et infinie à l'infini.