Conditions d'optimalité

Exercice 1. Problèmes variationnels

Soit V un espace de Hilbert. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. Soit L une forme linéaire et continue sur V. On pose

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u).$$

1.1 - Montrer que J est dérivable sur V au sens de Fréchet et que

$$\langle J'(u), w\rangle = \frac{1}{2}(a(u,w) + a(w,u)) - L(w).$$

En déduire que J est α-convexe ssi a est α-coercive.

1.2 - Appliquer le résultat de la question précédente au problème de minimisation de

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f\, v dx.$$

sur $H^1_0(\Omega)$, où Ω est borné. Prouver que ce problème de minimisation possède une solution unique et montrer que le minimiseur u de J est solution d'un problème aux limites.

1.3 - On munit $H^1_0(\Omega)$ du produit scalaire $(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + u\, v\, dx$. Montrer que si on identifie V à (son dual) V' à l'aide de ce produit scalaire, $J'(u) \equiv u_0$ où $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - u) + u_0 = -f & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exercice 2. Splines cubiques

Un moyen d'interpoler des données $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ ($n \geq 3$) où $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ et $y_i \in \mathbb{R}$ par une fonction $[0,1] \ni x \to v(x)$ assez régulière est de résoudre inf $J(v)$ où

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v''(x))^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (v(x_i) - y_i)^2.$$

2.1 - À quoi servent intuitivement les deux termes définissant J ? Montrer qu'un espace adapté au problème est $v \in H^2(0,1)$ muni de sa norme naturelle $\|v\|^2_{H^2} = \|v\|^2_{L^2} + \|v'\|^2_{L^2} + \|v''\|^2_{L^2}$. Ecrire J sous la forme $\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + c$ où a est une forme bilinéaire, L une forme linéaire et c une constante que l'on explicitera.

2.2 - Montrer que J est dérivable au sens de Fréchet.

2.3 - Montrer que J est strictement convexe.

2.4 - Montrer que J est "infinie à l'infini" (indication : on utilisera le fait que pour une fonction $v \in H^1(0,1)$, on a $v(t) = v(0) + \int_0^t v'(s)ds$). En déduire que J admet un minimum $u \in H^2(0,1)$ unique.

2.5 - Ecrire les conditions d'Euler pour u. En déduire que u est cubique par morceaux.

2.6 - Ecrire les conditions que doit vérifier u aux points x_i.

Exercice 3. Moindres carrés et pénalisation

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On considère le problème suivant :

$$(P) : \quad \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Av - b\|^2_{\mathbb{R}^m}$$

où $\| \ \|_{\mathbb{R}^m}$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

3.1 - Donner une interprétation géometrique du problème (P). En déduire que (P) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^n$. Discuter de son unicité en fonction du rang de A.

3.2 - On pose $J(v) = \frac{1}{2}\|Av - b\|^2_{\mathbb{R}^m}$. Montrer que u est solution de (P) si, et seulement si,

$$A^t A u = A^t b.$$

Retrouver en fonction du rang de A, les résultats de la question précédente sur l'unicité.

3.3 - Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{\varepsilon}{2}\ \|v\|^2_{\mathbb{R}^n}$$

Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v\in\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(v)$. Ecrire l'équation d'Euler satisfaite par u_ε. Montrer que $\|u_\varepsilon\| \leq \|u\|$ pour tout u solution de P. En déduire que u_ε converge, lorsque $\varepsilon \mapsto 0^+$, vers la solution de (P) de norme minimale.

Exercice 4. Inégalité de Kantorovitch

Soit A une matrice carrée $n \times n$, symétrique définie positive dont les valeurs propres sont $\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n\}$. On désignera par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres ($Ae_k = \lambda_k e_k$). On souhaite montrer que

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(Ax,x)(A^{-1}x,x)}{||x||^4} = 1 \qquad (1)$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(Ax,x)(A^{-1}x,x)}{||x||^4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \qquad (2)$$

4.1 - Calculer le gradient de la fonction J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$J(x) = (Ax,x)(A^{-1}x,x)$$

4.2 - Montrer, en se restreignant au plan $\{e_1, e_n\}$, que J n'est pas convexe dès que $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ est assez grand. (Indication : on évaluera J en e_1, e_n et $(e_1 + e_n)/2$)

4.3 - Transformer les problèmes (1) et (2) sous forme de problèmes d'optimisation avec contrainte d'égalité, notés (1)' et (2)' posés sur la boule unité. Écrire les conditions nécessaires d'optimalité associées à ces deux problèmes.

4.4 - On note $\{\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_m\}, m \leq n$, les valeurs propres distinctes de A ($\mu_1 = \lambda_1,\ \mu_m = \lambda_n$). On note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre μ_j. Montrer que si x satisfait les conditions d'optimalité, il a une projection non nulle sur au plus deux des espaces E_j.

4.5 - Déduire de ce qui précède que la résolution des problèmes (1)' et (2)' se ramène à l'étude d'un nombre fini de cas. En déduire les résultats (1) et (2). Montrer que la solution de (1)' n'est jamais unique et que celle du problème (2)' est unique au signe près si et seulement si les deux valeurs propres λ_1 et λ_n sont simples.