Minimisation avec contraintes

Exercice 1. Valeurs propres du Laplacien

On étudie la première valeur propre du Laplacien dans un domaine borné Ω. Pour cela, on introduit le problème de minimisation sur $K = \{v \in H^1_0(\Omega) : \int_\Omega v^2 dx = 1\}$

$$\min_{v\in K}\left\{J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right\}.$$

1.1 - Montrer que toute suite minimisante de J sur K admet une sous suite qui converge fortement dans $H^1_0(\Omega)$. En déduire que le problème de minimisation admet au moins une solution.

1.2 - Écrire l'équation d'Euler vérifiée par une solution u du problème de minimisation. En déduire que u est bien un vecteur propre du Laplacien associé à la plus petite valeur propre.

Exercice 2. Qualification de contraintes

2.1 - Les contraintes : $-x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0, \quad -(1-x_1)^3 + x_2 \le 0$ sont-elles qualifiées (au sens de la définition du cours) aux points $(1,0)$ et $(0,1)$ (faire un dessin) ?

2.2 - Exhiber une fonction J dérivable, dont le minimum sur l'ensemble K défini par les contraintes précédentes ne vérifie pas la condition d'optimalité.

Exercice 3. Équilibre statistique

On considère un système de N particules (quantiques) et d'énergie totale E en équilibre thermodynamique sur p niveaux d'énergie $E_1 < E_2 \ldots < E_p$. Nous supposons N grand par rapport à p. Cela permet de considérer N réel > 0 avec une bonne approximation. On sait que la répartition entre les niveaux d'énergie est donnée par le minimum de l'entropie (mathématique) : si on note x_i le nombre de particules d'énergie E_i, l'équilibre est donc donné par

$$\min_{\substack{x_i \ge 0,\ i=1,\ldots,p \\ x_1+\ldots+x_p = N \\ x_1E_1+\ldots+x_pE_p = E}} H(x) = \sum_{i=1}^p x_i \log(x_i).$$

On suppose de plus que

$$NE_1 < E < NE_p.$$

3.1 - Monter que la fonction H est strictement convexe sur $[0,+\infty[^p$.

3.2 - Montrer que ce problème admet une unique solution $\bar{x}$ dans $[0,+\infty[^p$.

3.3 - On suppose que le point de minimum $\overline{x}$ appartient à $]0,+\infty[^p$. Déterminer les conditions d'optimalité vérifiées par $\bar{x}$.

3.4 - Montrer que si $\bar{y}$ vérifie les conditions d'optimalité de la question précédente, $\bar{y}_i$ est de la forme $a\exp(-bE_i)$ où a et b sont des réels solutions d'un système que l'on déterminera.

3.5 - Montrer que le système définissant a et b admet une solution unique.

3.6 - Montrer (à l'aide du Théorème de Kuhn et Tucker) que dès que $\varepsilon > 0$ est assez petit, $\overline{y}$ maximise H sur $[\varepsilon,+\infty[^p$. En déduire que $\overline{x} = \overline{y}$.

Exercice 4. Mélange gazeux

L'état d'équilibre d'un mélange gazeux comportant x_j moles de molécules j $(j = 1,\ldots,n)$ est caractérisé par le minimum de l'enthalpie libre de Gibbs

$$G(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n x_j \log\left(x_j/s\right)$$

où les c_j sont des coefficients donnés et $s = \sum_{j=1}^{n} x_j$. De plus les x_j doivent respecter les contraintes

$$x_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = l_i$$

pour tout i, $1 \leq i \leq m$, où l'indice i correspond aux atomes, m est le nombre de sortes d'atomes, où a_{ij} est le nombre d'atome i dans la molécule j et $l_i > 0$ est la quantité d'atome i dans le mélange (constante donnée). Ainsi $a_{ij} \geq 0$ et, pour tout j il existe i tel que $a_{ij} > 0$.

On note D l'ensemble défini par les contraintes sur les x_j et $K = \{x \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0, \forall j\}$ le cône positif. Ainsi on considère le problème

$$(P) : \quad \min_{x \in D} G(x).$$

4.1 - Montrer que D est borné, que G est bien définie sur K et que (P) admet au moins une solution.

4.2 - Montrer que G est convexe sur K, c'est à dire que pour x, y appartenant à K, pour tout $\theta \in [0,1]$, on a

$$G(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta G(x) + (1-\theta)G(y).$$

Dans un premier temps, on pourra établir ce résultat pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

4.3 - On suppose que $\bar{x}$ appartient à l'intérieur de K. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ soit solution de (P).

Exercice 5. Inégalité de Kantorovitch

Soit A une matrice carrée $n \times n$, symétrique définie positive dont les valeurs propres sont $\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n\}$. On désignera par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres ($Ae_k = \lambda_k e_k$). On souhaite montrer que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(Ax,x)(A^{-1}x,x)}{||x||^4} = 1 \qquad (1)$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(Ax,x)(A^{-1}x,x)}{||x||^4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \qquad (2)$$

5.1 - Calculer le gradient de la fonction J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$J(x) = (Ax,x)(A^{-1}x,x)$$

5.2 - Montrer, en se restreignant au plan $\{e_1, e_n\}$, que J n'est pas convexe dès que $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ est assez grand. (Indication : on évaluera J en e_1, e_n et $(e_1 + e_n)/2$)

5.3 - Transformer les problèmes (1) et (2) sous forme de problèmes d'optimisation avec contrainte d'égalité, notés (1)' et (2)' posés sur la boule unité. Écrire les conditions nécessaires d'optimalité associées à ces deux problèmes.

5.4 - On note $\{\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_m\}, m \leq n$, les valeurs propres distinctes de A ($\mu_1 = \lambda_1,\ \mu_m = \lambda_n$). On note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre μ_j. Montrer que si x satisfait les conditions d'optimalité, il a une projection non nulle sur au plus deux des espaces E_j.

5.5 - Déduire de ce qui précède que la résolution des problèmes (1)' et (2)' se ramène à l'étude d'un nombre fini de cas. En déduire les résultats (1) et (2). Montrer que la solution de (1)' n'est jamais unique et que celle du problème (2)' est unique au signe près si et seulement si les deux valeurs propres λ_1 et λ_n sont simples.