Lagrangien et dualité

Exercice 1. Minimisation sous contrainte et Lagrangien

On cherche à calculer la position d'équilibre d'une membrane Ω, attachée et soumise à des contraintes : le déplacement vertical $u(x) \in \mathbb{R}$ est l'inconnue, la force appliquée est $f \in L^2(\Omega)$. On montre que u est solution du problème modèle

$$\min_{u \in K} J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx. \qquad (1)$$

où K est le sous ensemble de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant les contraintes. Ici, on suppose que le déplacement de la membrane est limité par la présence d'un obstacle situé sous la membrane. Pour simplifier, on considère le cas unidimensionnel, $\Omega =]0,1[$ et un obstacle ponctuel situé en $x = 1/2$ à la hauteur a. Ainsi, l'espace de minimisation K est défini par

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ u(1/2) \geq a\}.$$

On posera $F(u) = a - u(1/2)$.

1.1 - Montrer que le problème de minimisation (1) admet une solution unique.

1.2 - Soit u le minimum de J sur K. Quel est le système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par u ?

1.3 - On introduit le Lagrangien associé au système, c'est à dire

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + pF(u).$$

On dit que $(u,p) \in H_0^1(0,1) \times \mathbb{R}^+$ est un point selle du Lagrangien, si pour tout $(v,q) \in H_0^1(0,1) \times \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p).$$

Rappeler le lien entre un point selle (u,p) du Lagrangien et le problème de minimisation de J.

1.4 - On introduit la fonction $\mathcal{G}$ définie par $\mathcal{G}(q) = \inf_{v \in H_0^1(0,1)} \mathcal{L}(v,q)$. Montrer que

$$\max_{q \in \mathbb{R}^+} \mathcal{G}(q) = \inf_{v \in K} J(v), \qquad (2)$$

et que (u,p) est un point selle du Lagrangien si et seulement si $\mathcal{G}(p) = J(u)$ et $u \in K$.

1.5 - Quel est l'intérêt pratique de (2). Calculer la dérivée de $\mathcal{G}$.

Exercice 2. Un problème de contrôle optimal

On considère un système dont l'état u est représenté par un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, solution du système

$$Au = f + v, \qquad (3)$$

où A est une matrice symétrique réelle, définie positive, $f \in \mathbb{R}^n$ est une donnée et $v \in \mathbb{R}^n$ est un contrôle (Notons qu'un tel système peut-être obtenu suite à la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles linéaire). On cherche à ajuster le contrôle v de sorte à obtenir un état cible $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

On définit la fonction $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$j(w) = \|w - u_0\|^2. \qquad (4)$$

Enfin, pour tout contrôle $v \in \mathbb{R}^n$, on introduit la fonction coût

$$J_c(v) = j(u(v)),$$

où $u(v)$ est la solution de l'équation (3).

2.1 - Montrer que la fonction $v \mapsto u(v)$ est dérivable. Calculer la dérivée de J_c.

2.2 - On considère le cas où n est grand, de tel sorte qu'on ne peut calculer directement l'inverse de A. On a par contre les capacités suffisantes pour résoudre des systèmes du type $Ax = b$. Montrer que le calcul de la dérivée de J_c en v ne nécessite que la résolution de deux systèmes linéaires. On notera p la solution du nouveau système introduit (dit adjoint).

2.3 - On présente ici une autre méthode (très générale) permettant de déterminer directement le système vérifié par l'état adjoint p. On note pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(u, v) = j(u)$$

Le problème de minimisation de J_c est équivalent au problème de minimisation de $J(u, v)$ sous la contrainte $Au = f + v$. Introduire le Lagrangien $\mathcal{L}(u, v, p)$ associé à ce problème.

2.4 - Calculer la dérivée de $\mathcal{L}$ par rapport à u et v.

2.5 - En remarquant que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$J_c(v) = \mathcal{L}(u(v), v, p),$$

Exprimer J_c' en fonction des dérivées partielles de $\mathcal{L}$ par rapport à u et v et de $u(v)$ par rapport à v.

2.6 - Montrer qu'on peut choisir astucieusement p de telle sorte qu'il ne soit pas nécessaire de calculer la dérivée de $u(v)$ par rapport à v pour obtenir J_c'.