## Algorithmes d'optimisation

### Exercice 1. Minimisation sous contrainte et Lagrangien (suite)

On reprend l'énoncé de l'exercice 1 du TD 14 où l'on cherche à calculer

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2 dx - \int_0^1 f v dx \qquad (1)$$

où $K$ est le sous ensemble de $H_0^1(0,1)$ défini par

$$K = \{v \in H_0^1(0,1) \ : \ F(v) \leq 0\}$$

avec $F(v) = a - v(1/2)$ pour $v \in H_0^1(0,1)$. On introduit la fonction $\mathcal{G}$ définie par $\mathcal{G}(q) = \inf_{v \in H_0^1(0,1)} \mathcal{L}(v,q)$ ou $L(v,q) = J(v) + pF(v)$ désigne le Lagrangien associé au problème de minimisation de $J$. Nous rappelons que

$$G(p) = \max_{q \in \mathbb{R}^+} \mathcal{G}(q) = \inf_{v \in K} J(v) = J(u) \qquad (2)$$

et que $(u,p)$ est un point selle du Lagrangien si et seulement si $\mathcal{G}(p) = J(u)$ et $u \in K$.

**1.1 -** Calculer la dérivée de $\mathcal{G}$. Quel est l'intérêt pratique de (2) ?

**1.2 -** On considère l'algorithme de type Uzawa, $p^0 = 0$,

$$\mathcal{L}(u^n, p^n) = \inf_{v \in H_0^1(0,1)} L(v, p^n)$$

$$p^{n+1} = P_{\mathbb{R}^+}(p^n + \mu F(u^n)).$$

Quel est le nom de cet algorithme vis à vis de $\mathcal{G}$ ?

**1.3 -** Calculer $u$ pour $f = -1$. On distinguera deux cas suivant la valeur de $a$.

**1.4 -** Dans le cas particulier précédent, calculer explicitement $u^n$ et $p^{n+1}$ en fonction de $p^n$. Donner une condition nécessaire sur $\mu$ pour que l'algorithme converge. Quel choix pour $\mu$ vous semble le plus judicieux ?

### Exercice 2. L'algorithme de gradient à pas fixe

Soit $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ avec $A$ matrice symétrique définie positive $N \times N$ de spectre $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N$ et $b$ vecteur de $\mathbb{R}^N$. Notons $u$ le point de minimum de $J$.

**2.1 -** Montrer que l'algorithme de gradient à pas fixe

$$u^{n+1} = u^n - \mu J'(u^n)$$

converge pour $0 < \mu < 2/\lambda_N$.

**2.2 -** Donner la valeur de $\mu$ qui assure la vitesse maximale de convergence et montrer que pour cette valeur, $\lim_{n\to\infty} ||u^n - u||^{1/n} = (\lambda_N - \lambda_1)/(\lambda_N + \lambda_1)$.

### Exercice 3. Méthode de pénalisation

Soit $J$ une fonctionnelle définie sur $V = \mathbb{R}^n$ différentiable, strictement convexe et tendant vers $+\infty$ à l'infini. Soit $K$ un sous-ensemble convexe fermé de $V$, on s'intéresse à l'approximation de la solution de l'unique solution $u$ du problème d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{v \in K} J(v)$$

par la solution d'un problème d'optimisation sans contrainte. Pour ce faire, soit $\psi(v) : V \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et convexe telle que :

$$\begin{cases} \psi(v) \geq 0 \quad \forall v \in V \\ \psi(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in K \end{cases}$$

(Il s'agit d'une sorte de fonction "indicatrice" de l'ensemble $K$). Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon}\psi(v).$$

**3.1 -** Montrer que le problème $\min_{v \in V} J_\varepsilon(v)$ admet une solution unique $u^\varepsilon$ dans $V$.

**3.2 -** Montrer que $J(u^\varepsilon) \leq J(u)$ et que l'ensemble $\{u^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est borné. En déduire que $u^\varepsilon$ converge vers $u$ quand $\varepsilon \to 0$.

**3.3 -** Montrer que si $u$ appartient à l'intérieur de l'ensemble $K$, alors $u^\varepsilon = u \ \forall \, \varepsilon > 0$.

**3.4 -** On suppose que l'ensemble $K$ est défini par :

$$K = \{v \in V / \phi_j(v) \leq 0, 1 \leq j \leq M\}$$

où les fonctions $\phi_j$ sont convexes et continues de $V$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout ce qui précède s'applique en prenant : $\psi(v) = \sum_{j=1}^{M} [\max(\phi_j(v), 0)]^2$

**3.5 -** On suppose maintenant que les fonctions $J$ et $\phi_j$ sont continûment différentiables, que les contraintes sont qualifiées en $u$ et que les vecteurs $\{\nabla \phi_j(u), j \in I(u)\}$ sont linéairement indépendants. (On rappelle que $j \in I(u) \Longleftrightarrow \phi_j(u) = 0$). Montrer que pour tout $j$ :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \max(\phi_j(u^\varepsilon), 0) = \frac{\lambda_j}{2}$$

où les $\lambda_j$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés au problème.